פתרון של תרגיל 8. מבוא לשפה ולוגיקה של יחסים.

1) א) תהא L שפה המכילה סימן פונקציה פונקציה חד-מקומית F וסימן של שיויון.
לכל זוג מהמבנים הבאים מצאו פסוק שנכון באחד מהם ולא נכון בשני.

$M_1=(N,x+1),\ \ M_2=(Z,x+1),\ \ M_3=(N,x^2),\ \ M_4=(Z,x^2),\ M_5=(Z,x^3)$

ב) תהא L שפה המכילה סימן יחס דו-מקומי R וסימן של שיויון.
לכל זוג מהמבנים הבאים מצאו פסוק שנכון באחד מהם ולא נכון בשני.

$M_1=(N,\le),\ \ M_2=(Z,\le),\ \ M_3=(N,|),\ \ M_4=(Q,\le),\ M_5=(Z,|)$

כאשר $a\,|\,b \Leftrightarrow (\exists c)(b=ac)$ ז"א a מחלק את b.

ג) תהא L שפה המכילה סימן פונקציה דו-מקומית F וסימן של שיויון.
לכל זוג מהמבנים הבאים מצאו פסוק שנכון באחד מהם ולא נכון בשני.

$M_1=(N,+),\ \ M_2=(N,\times),\ \ M_3=(Q,+),\ \ M_4=(C,\times),\ \ M_5=(P(N),\cup)$

ד) תהא L שפה המכילה סימן יחס דו-מקומי R וסימן של שיויון.
לכל זוג מהמבנים הבאים מצאו פסוק שנכון באחד מהם ולא נכון בשני.

$M_1=(N,=),\ \ M_2=(N,\equiv_3),\ \ M_3=(N,\equiv_4),\ \ M_4=(Z,\rho),\ M_5=(P(N),\tau)$

כאשר $a\rho b \Leftrightarrow (a\vdots b \wedge b\vdots a)$ ו- $A\tau B \Leftrightarrow |A\triangle B|<\infty$ ז"א $A\triangle B$ קבוצה סופית.

פתרון של סעיפים זוגיים. ב). נתבונן בנוסחות $\alpha\equiv(\exists x)(\forall y)(xRy)$ - קיים מינימום,
$\beta\equiv(\forall x)(\forall y)(xRy\vee yRx)$ - סדר קווי,
$\gamma\equiv(\forall x)(\forall y)((xRy\wedge\neg(x=y))\to(\exists z)(xRz\wedge zRy\wedge\neg(x=z)\wedge\neg(z=y)))$ - סדר צפוף,
$\delta\equiv(\forall x)(\forall y)(xRy\wedge yRx\to x=y)$ - יחס אנטי סימטרי.
γ מספקת רק מבנה M_4, δ לא מספקת רק מבנה M_5, β מספקת מבנה M_1 ו- M_2 ולא מספקת רק מבנה M_3, α מספקת מבנה M_1 ולא מספקת רק מבנה M_2.

ד) נתבונן בנוסחות $\alpha\equiv(\forall x)(\forall y)(xRy\to x=y)$ - בכל מחלקת שקילות יש איבר יחיד,
$\beta_n\equiv(\exists x)(\exists x_1)...(\exists x_n)(x_1Rx\wedge...\wedge x_nRx\wedge\neg(x_1=x_2)\wedge...\wedge\neg(x_1=x_n)\wedge\neg(x_2=x_3)\wedge...\wedge\neg(x_{n-1}=x_n))$
- קיימת מחלקת שקילות עם לפחות n איברים,
$\gamma_n\equiv(\exists x_1)...(\exists x_n)(\neg(x_1Rx_2)\wedge...\wedge\neg(x_1Rx_n)\wedge\neg(x_2Rx_3)\wedge...\wedge\neg(x_{n-1}Rx_n))$ - קיימים לפחות n מחלקות שקילות,
α מספקת רק מבנה M_1, β_3 לא מספקת רק מבנים M_1 ו- M_4, γ_5 לא מספקת רק מבנים M_3 ו- M_2, γ_4 לא מספקת רק מבנה M_2.

2) א) נתונה שפה $L=(E,=;\sigma)$ ו- $\sigma(E)=\sigma(=)=2$ ($=$ מסמן יחס השוויון).
מצאו פסוק בשפה $L=(E,=;\sigma)$ שמגדיר כי במבנה מתמטי $M=(|M|;E,=)$

א1) E הוא יחס שקילות

א2) E הוא יחס שקילות עם מחלקת שקילות יחידה עם בדיוק 2 איברים וכל מחלקת שקילות אחרת מכילה בדיוק איבר אחד.

ב) נתונה שפה $L=(\le,=;\sigma)$ ו- $\sigma(\le)=\sigma(=)=2$. מצאו פסוק בשפה L שמגדיר כי מבנה מתמטי $M=(|M|;\le,=)$ הוא קבוצה סדורה חלקית עם איבר מינימאלי יחיד בלי איבר מינימום ואם 2 איברים מקסימליים.

ג) נתונה שפה $L=(F,=;\sigma)$ ו-$\sigma(F)=1$. מצאו פסוק בשפה L שמגדיר כי F פונקציה על אבל לא חד-חד ערכית במבנה מתמטי $M=(|M|;F,=)$ ולכל איבר י בדיוק 2 מקורות ז"א לכל $c\in|M|$ קיימים בדיוק 2 איברים $a,b\in|M|$ שפונקציה F מתאימה c.

פתרון של סעיפים זוגיים. ב). $\alpha\equiv(\exists x)(\forall y)((y\le x)\to(y=x))$,
$\beta\equiv(\forall x)(\forall z)(\forall y)(((y\le x)\to(y=x))\wedge((y\le z)\to(y=z))\to(x=z))$,
$\gamma\equiv\neg(\exists x)(\forall y)(x\le y)$
$\varepsilon(x)_{\max}\equiv(\forall y)(x\le y\to x=y)$,
$\delta\equiv(\exists x)(\exists y)((\varepsilon(x)\wedge\varepsilon(y)\wedge\neg(x=y))\wedge(\forall z)(\varepsilon(z)\to(z=x)\vee(z=y)))$
פסוק α: קיים איבר מינימאלי. פסוק β: אם קיים איבר מינימאלי אז הוא יחיד.
פסוק γ: אין איבר מינימום. פסוק δ: קיימים בדיוק 2 איברים מקסימאליים (חלק ראשון קיימים לפחות 2 איברים מקסימאליים, חלק שני קיימים לא יותר מ-2 איברים מקסימאליים).
לכן $\varphi\equiv\alpha\wedge\beta\wedge\gamma\wedge\delta$.

3) א) יהא $M=(N,F)$ מבנה מתמטי כאשר N קבוצת מספרים הטביעם ו-F פעולה אונרית $F(x)=x+1$. הוכיחו כי

א1) 0 גדיר במבנה $M=(N,F)$.

א2) 1 גדיר במבנה $M=(N,F)$, כל מספר טבעי n גדיר במבנה $M=(N,F)$.

פתרון. א1) הנוסחה $\varphi_0(x)\equiv\neg(\exists y)(F(y)=x)$ מגדירה את 0.

א2) הנוסחה $\varphi_1(x)\equiv(\exists y)(\varphi_0(y)\wedge F(y)=x)$ מגדירה את 1.

הנוסחה $\varphi_{n+1}(x)\equiv(\exists y)(\varphi_n(y)\wedge F(y)=x)$ מגדירה את $n+1$ אם ידוע הנוסחה $\varphi_n(x)$ שמגדירה את n. מעיקרון אינדוקציה רגילה נובע כי כל מספר טבעי n גדיר במבנה $M=(N,F)$.

ב) יהא $M=(N,F,G)$ מבנה מתמטי כאשר N קבוצת מספרים הטביעם ו-$F,\ G$ פעולות אונריות $F(x)=2x,\ G(x)=x^2$. הוכיחו כי

ב1) 1 גדיר במבנה $M=(N;\ F,\ G)$.

ב2) קבוצה של מספרים אי-זוגיים גדירה במבנה $M=(N;\ F,\ G)$.

ב3) יחס R מוגדר על-ידי $a\,R\,b\Leftrightarrow b=a^6$, גדיר במבנה $M=(N;\ F,\ G)$.

ג) הוכיחו כי

ג1) $\varnothing$ גדירה במבנה $M=(P(N),\subseteq)$.

ג2) פעולה $\cup$ גדירה במבנה $M=(P(N),\subseteq)$.

ג3) קבוצה של כל איברי $P(N)$ המכילות בדיוק איבר אחד גדירה במבנה $M=(P(N),\subseteq)$.

ד) הוכיחו כי

ד1) 3 גדיר במבנה $M=(N,+)$.

ד2) קבוצה של מספרים אי-זוגיים גדירה במבנה $M=(N,+)$.

ד3) יחס $\le$ גדיר במבנה $M=(N,+)$.

פתרון של סעיפים זוגיים. ב). ב1) $\alpha_0(x) \equiv (\forall y)(x \leq y)$,

$\alpha_1(x) \equiv \neg\alpha_0(x) \wedge (\forall y)(\neg\alpha_0(y) \to x \leq y)$.

ב2) למעשה הנוסחא $\varphi_{=0}(x) = \forall y(+(y,x) \approx x)$ מגדירה את 0 בכל הסעיפים **ב2)** ,

ב3) ונוכל להשתמש בה בסעיפים אלה.

ב2) נוכל להגדיר את 1, אחד אינו אפס והוא האיבר היחיד פרט לאפס שבכל פירוק שלו כסכום שני מספרים אחרים בהכרח אחד המספרים האלה הוא 0 ופורמלית: $\varphi_{=1}(x) = \neg\varphi_{=0}(x) \wedge \forall y \forall z(\ (+(y,z) \approx x) \to (\varphi_{=0}(y) \vee \varphi_{=0}(z)\ )$

וכמובן $3 = 1+1+1$ ולכן נוכל להגדיר $\varphi_{=3}(x) = \exists y(\ \varphi_{=1}(y) \wedge (+(\ y,+(y,y)) \approx x)\ )$

ב3) 1 גדיר במבנה ע"י הנוסחא הפשוטה $\varphi_{=1}(x) = \forall y(\times(y,x) \approx y)$

ונשאר להגדיר את 3 ע"י החיבור: $\varphi_{=3}(x) = \exists y(\varphi_{=1}(y) \wedge (+(y,+(y,y) \approx x))$

ד)

ד2) $\alpha(x) \equiv (\forall y)(\neg(x = y + y))$

ד3) $\alpha_{\leq}(x,y) \equiv (\exists z)(x + z = y)$

4) הוכיחו או הפריכו.

א) $(\exists x)(\forall y)(P(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)(P(x,y)$

ב) $(\exists x)(\forall y)(P(x,y) \Leftrightarrow (\forall y)(\exists x)(P(x,y)$

ג) $(\exists x)((P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)(P(x)) \wedge (\exists x)(Q(x))$

ד) $(\exists x)((P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(P(x)) \wedge (\exists x)(Q(x))$

ה) $\neg(\exists x)((P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(\neg P(x) \vee \neg Q(x))$