פתרון תרגיל 7. תחשיב פסוקים.

1) הוכיחו כי
א) אם פסוקים $(\neg x \vee y)$ ו- $(\neg z \vee \neg y)$ טאוטולוגיות אז גם $(x \to \neg z)$ טאוטולוגיה.
ב) פסוק $(A \wedge (A \to B)) \to B$ טאוטולוגיה.
ג) פסוק $A \leftrightarrow B$ טאוטולוגיה אם ורק אם $A \Leftrightarrow B$ (A שקול לוגית ל- B).

2) הרכיבו פסוק עם 3 משתנים פסוקים A,B,C שמקיים ערך T אם ורק אם בדיוק 2 משתנים מקיימים ערך F.

פתרון. כותבים את טבלת האמת הנדרשת בת 8 שורות שמגדירה את הפונקציה f, $Val(f,s)=T$ אם ורק אם $s \in \{(F,F,T),(F,T,F),(T,F,F)\}$ ובונים את הפסוק בצורה הדיסיונקטיבית הנורמאלית הקנונית:
$(\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C)$.

3) א) מצאו כל פסוקים בצורה הדיסיונקטיבית הנורמאלית הקנונית על קבוצת משתנים $\{x,y\}$.
ב) מצאו את הצורה הדיסיונקטיבית הנורמאלית הקנונית של פסוק $(A \to C) \wedge (A \to (B \wedge C))$

פתרון. א) קוניונקציות הבסיסיות הקנוניות על קבוצת משתנים $\{x,y\}$ הם:
$(x \wedge y)$, $(\neg x \wedge y)$, $(x \wedge \neg y)$, $(\neg x \wedge \neg y)$
אפשר להרכיב 2^4-1 פסוקים בצורה הדיסיונקטיבית הנורמאלית הקנונית על קבוצת משתנים $\{x,y\}$.

4) הוכיחו כי אם פסוק φ כתוב ע"י הקשר $\to$ בלבד (פרט למשתנים פסוקים וסוגריים) אז קיים משתנה פסוקי p ב φ כך ש $p \Rightarrow \varphi$.

פתרון. נוכיח באינדוקציה על אורך הפסוק.
בסיס: יהא $\varphi = p$ פסוק אטומי. אז הטענה מתקיימת כי במקרה זה $p \Rightarrow \varphi$.
הנחה: נניח שלכל פסוק φ באורך $\geq n$ הכתוב במערכת $\{\to\}$ קיים משתנה פסוקי p המופיע ב- φ המקיים $p \Rightarrow \varphi$.
צעד האינדוקציה: יהא φ פסוק באורך n הכתוב במערכת $\{\to\}$. אז מתקיים:
$\varphi = \psi \to \chi$ כאשר ψ ו- χ פסוקים מאורך קטן מ- n ומקיימים את טענת האינדוקציה,
כלומר קיימים משתנים p ו- q כך ש: $\begin{matrix} p \Rightarrow \psi \\ q \Rightarrow \chi \end{matrix}$. מטבלת האמת של הקשר $\to$ נובע כי $\chi \Rightarrow \varphi$, ולכן מתקיים: $q \Rightarrow \chi \Rightarrow \varphi$.

5) נגדיר פעולות נוספות עם פסוקים $A\downarrow B=\neg(A\vee B)$ הוכיחו כי $\{\downarrow\}$ היא מערכת פעולות שלמה.

פתרון. נתבסס על העובדה ש-$\{\neg,\vee,\wedge\}$ היא מערכת קשרים שלמה ונוכיח באינדוקציה על אורך הפסוק שלכל פסוק הכתוב במערכת $\{\neg,\vee,\wedge\}$ קיים פסוק שקול הכתוב במערכת $\{\downarrow\}$.

ננסח יותר מדויק. יהא f פונקציה אמת (בוליאנית) s-מקומית כלשהי אז לפי משפט שהוכחנו בהרצאה קיים פסוק φ במערכת קשרים $\{\neg,\vee,\wedge\}$ ו-$Val(\varphi,s)=f(s)$. נוכיח באינדוקציה על אורך הפסוק שקיים פסוק φ^* כתוב במערכת $\{\downarrow\}$ ושקול ל-φ ולכן $Val(\varphi,s)=Val(\varphi^*,s)=f(s)$.

<u>בסיס האינדוקציה</u>: פסוק אטומי: $\varphi=A=\varphi^*$.

<u>הנחת האינדוקציה</u>: לכל פסוק φ מאורך קטן מ-n הכתוב במערכת $\{\neg,\vee,\wedge\}$ קיים פסוק שקול φ^* הכתוב במערכת $\{\downarrow\}$.

<u>צעד האינדוקציה</u>: יהא φ פסוק מאורך n הכתוב במערכת $\{\neg,\vee,\wedge\}$. יש 3 מקרים.

1) $\varphi=\neg\alpha$, אז מהנחת האינדוקציה קיים α^* הכתוב במערכת $\{\downarrow\}$ ושקול לוגית ל-ψ. ולכן $\varphi^*=\alpha^*\downarrow\alpha^*\Leftrightarrow\neg\alpha$ הוא פסוק שקול לוגית ל-φ הכתוב במערכת $\{\downarrow\}$.

2) $\varphi=\alpha\vee\beta$, אז מהנחת האינדוקציה קיימים α^*,β^* הכתובים במערכת $\{\downarrow\}$ ושקולים לוגית ל-α,β בהתאמה. ולכן $\varphi^*=\neg(\alpha^*\downarrow\beta^*)\Leftrightarrow(\alpha^*\downarrow\beta^*)\downarrow(\alpha^*\downarrow\beta^*)$ הוא פסוק שקול לוגית ל-φ הכתוב במערכת $\{\downarrow\}$.

3) $\varphi=\alpha\wedge\beta$, אז מהנחת האינדוקציה קיימים α^*,β^* הכתובים במערכת $\{\downarrow\}$ ושקולים לוגית ל-α,β בהתאמה. ולכן $\varphi^*=(\neg\alpha^*\downarrow\neg\beta^*)\Leftrightarrow(\alpha^*\downarrow\alpha^*)\downarrow(\beta^*\downarrow\beta^*)$ הוא פסוק שקול לוגית ל-φ הכתוב במערכת $\{\downarrow\}$.

6) נגדיר פעולות נוספות עם פסוקים $A*B=\neg A\wedge B$ הוכיחו כי $\{*,\wedge\}$ היא מערכת פעולות לא שלמה.

א) **פתרון**. נוכיח כי יש פסוק שאי אפשר לכתוב במערכת $\{*,\wedge\}$. הפסוק שנראה שאי אפשר לכתוב הוא טאוטולוגיה, כלומר פסוק המקבל ערך T לכל השמה. נוכיח זאת ע"י הוכחה **טענת עזר:** לכל פסוק φ הכתוב במערכת $\{*,\wedge\}$, עבור ההשמה g הנותנת ערך F לכל המשתנים בפסוק φ, מתקיים $val(\varphi,g)=F$.
נוכיח טענת עזר באינדוקציה על אורך הפסוק.
בסיס: יהא $\varphi=p$ פסוק אטומי, אז $val(\varphi,g)=g(p)=F$.
הנחה: נניח שלכל פסוק φ באורך $n>$ הכתוב במערכת $\{*,\wedge\}$ מתקיים $val(\varphi,g)=F$.

צעד האינדוקציה: יהא φ פסוק באורך n הכתוב במערכת $\{*,\wedge\}$. אז:
$\varphi=\psi\square\chi$ כאשר $\square\in\{*,\wedge\}$, ψ ו- χ פסוקים מאורך קטן מ- n ולכן ע"פ הנחת האינדוקציה מתקיים $\begin{matrix} val(\psi,g)=F \\ val(\chi,g)=F \end{matrix}$, מכאן נקבל:
$val(\varphi,g)=val(\psi\square\chi,g)=t_{\square}(val(\psi,g),val(\chi,g))=t_{\square}(F,F)=F$. במעבר האחרון השתמשנו בטבלאות האמת של $*$ ושל $\wedge$. הוכחנו טענת עזר.
לכן טאוטולוגיה אי אפשר לכתוב במערכת $\{*,\wedge\}$ כי אחרת מקבלים סתירה עם טענת עזר.

7) בטא $\vee$ דרך $\to$ ז"א מצא פסוק בנוי ממשתנים פסוקים רק בעזרת קשר $\to$ ושקול ל $(x\vee y)$.

8) הוכיחו כי קשר $\to$ אי אפשר לבטא דרך קשרים $\wedge,\vee$ ז"א לא קיים פסוק בנוי ממשתנים פסוקים רק בעזרת קשר $\wedge,\vee$ ושקול ל- $x\to y$.

פתרון. נוכיח באינדוקציה על אורך הפסוק, שכל פסוק φ הכתוב במערכת $\{\vee,\wedge\}$ מקבל ערך F בהשמה g הנותנת ערך F לכל המשתנים בפסוק.
בסיס האינדוקציה: φ פסוק אטומי והטענה מתקיימת.
הנחת האינדוקציה: לכל פסוק φ מאורך קטן מ- n הכתוב במערכת $\{\vee,\wedge\}$ מתקיים $val(\varphi,g)=F$ עבור g ההשמה הנותנת ערך F לכל המשתנים הפסוקיים.
צעד האינדוקציה: יהא φ פסוק מאורך n הכתוב במערכת $\{\vee,\wedge\}$. אז יש 2 מקרים.

1. $\varphi=\psi\vee\lambda$, אז מהנחת האינדוקציה $val(\psi,g)=F=val(\lambda,g)$, ומכאן:
$val(\varphi,g)=t_{\vee}(val(\psi,g),val(\lambda,g))=t_{\vee}(F,F)=F$ כנדרש.
2. $\varphi=\psi\wedge\lambda$, אז מהנחת האינדוקציה $val(\psi,g)=F=val(\lambda,g)$, ומכאן:
$val(\varphi,g)=t_{\wedge}(val(\psi,g),val(\lambda,g))=t_{\wedge}(F,F)=F$ כנדרש.

מכיוון ש- $val(x\to y,g)=T$ נקבל שאין פסוק שקול ל- $x\to y$ במערכת $\{\vee,\wedge\}$.

9) מצאו כל פתרונות X כפונקציה בפרמטרים A,B,C כך ש- $(A\to X)\Leftrightarrow(A\to(B\wedge C))$ כמה קיימות פונקציות כאלה ? כמה קיימות פתרונות X פונקציות כפונקציה בפרמטרים A,B,C,D ?

10) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.
א) קיימים בדיוק 4 פונקציות אמת עם 2 משתנים.

ב) קיים פסוק φ שמקיים תנאי הבא עבור כל פסוק ψ: אם φ גורר לוגית את פסוק ψ אז ψ שקול לוגית ל- φ.

ג) קיים פסוק φ שמקיים תנאי הבא: כל פסוק שגורר לוגית את פסוק φ הוא שקול לוגית ל-φ.
ד) קיימים בדיוק 7 צורות הדיסיונקטיביות הנורמאליות הקנוניות (לא ריקות) על קבוצת משתנים $\{x, y, z\}$.

פתרון. ב) נכון. φ טאוטולוגיה. הוכחה דומה לפתרון של סעיף הבא נוכיח שאת הטענה מקיימת אך ורק קונטרדיקציה (ז"א מקבלת ערך F לכל השמה).
ראשית נוכיח כי קונטרדיקציה מקיימת את הטענה:
תהי φ קונטרדיקציה, אז לכל השמה g מתקיים $val(\varphi, g) = F$. יהא ψ פסוק כך ש- $\psi \Rightarrow \varphi$, אם יש השמה s כך ש- $val(\psi, s) = T$ נקבל $val(\varphi, s) = T$ בסתירה להנחה ש-φ קונטרדיקציה, ולכן $val(\psi, g) = F$ לכל השמה g, כלומר ψ קונטרדיקציה ולכן ψ שקול לוגית ל-φ. זה מוכיח שקונטרדיקציה מקיימת את הטענה.
נראה שכל פסוק אחר לא מקיים את הטענה:
יהא φ פסוק שאיננו קונטרדיקציה, כלומר יש השמה s כך ש- $val(\varphi, s) = T$.
אז קונטרדיקציה ψ מקיימת $\psi \Rightarrow \varphi$ (כי קונטרדיקציה גוררת לוגית כל פסוק), אבל $\varphi \not\Leftrightarrow \psi$.

ד) לא נכון (הכללה של פתרון שאלה 3א).

11) מצאו צורה דיסיונקטיבית נורמאלית מינימאלית עבור פסוק
א) $(Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (\neg Y \wedge \neg Z)$
ב) $(Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (\neg Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge Y \wedge Z)$
ג) $(X \wedge Y) \vee (X \wedge \neg Y \wedge Z \wedge T) \vee (\neg X \wedge T) \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z \wedge T)$
<u>רמז.</u> אפשר להשתמש במפות קרנו.

תשובה. ב) $\neg Z \vee (\neg X \wedge \neg Y) \vee (X \wedge Y)$