אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
מדור בחינות

תאריך הבחינה: 2.07.13
שם המרצה: פרופ. משביצקי
מבחן ב: מבוא למתמטיקה דיסקרטית
מס' קורס: 20119661
שנה: תשע"ג סמ': ב מועד: א
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: דף נוסחאות

ענו על 3 השאלות הבאות. כל שאלה שווה 34 נקודות.
הוכיחו ונמקו תשובותיכם.
הניקוד המקסימאלי במבחן הוא 102. מי שיצבור 100 נקודות או יותר ציונו הסופי יהיה 100.

1)

(17 נק') **א)** מצאו מספר a_n מילים באורך n (בעלי n אותיות) באלף בית A, B, C, D, E שלא מכילים תתי מילים AA, AB, AC, AD, כאשר $a_0 = 1$.

(12 נק') **ב1)** מצאו מספר פתרונות טבעיים של משוואה $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ שונים זה מזה שמקיימים את התנאים $x_1 \le 4, x_2 \le 4, x_3 \le 3$.

(5 נק') **ב2)** מצאו פונקציה יוצרת עבור מספר פתרונות טבעיים של משוואה $x_1 + x_2 + x_3 = n$ שונים זה מזה שמקיימות את התנאים $x_1 \le 4, x_2 \le 4, x_3 \le 3$.

2) א) מצאו X כפסוק במשתנים A,B כך ש- $((B\vee A)\to A) \Leftrightarrow (B\to X)$ (מספיקה דוגמה אחת).
כמה קיימים פסוקים כאלה לא שקולים לוגית זה לזה ?
פתרון חלקי.

A	B	$B\to X$	X
T	T	T	T
T	F	T	F/T
F	T	F	F
F	F	T	F/T

כותבים את טבלת האמת של $((B\vee A)\to A)$, ומקבלים טבלת האמת עבור פסוק שקול לו $(B\to X)$. רואים שבשורות בהן B מקבל ערך F, הפסוק הנדרש X יכול לקבל T או F מפני שעבור השמה $s(B)=F$ נקבל $Val(B\to X,s)=T$. לכן יש בסה"כ $2^2=4$ פסוקים X כנדרש שאינם שקולים לוגית זה לזה: $X_1=(A\wedge B)$, $X_2=(A\wedge B)\vee(A\wedge\neg B)$, $X_3=(A\wedge B)\vee(A\wedge\neg B)\vee(\neg A\wedge\neg B)$, $X_4=(A\wedge B)\vee(\neg A\wedge\neg B)$.

(11 נק') **ב)** נגדיר קשר $\{\uparrow\}$ בין פסוקים על-ידי $A\uparrow B=\neg(A\wedge B)$ (עבור קשר $\{\uparrow\}$ משתמשים בשם קשר $NAND$). הוכיחו כי מערכת $\{\uparrow\}$ היא מערכת קשרים שלמה.

פתרון חלקי. נתבסס על העובדה ש- $\{\neg,\vee,\wedge\}$ היא מערכת קשרים שלמה ונוכיח באינדוקציה על אורך הפסוק שלכל פסוק φ הכתוב במערכת $\{\neg,\vee,\wedge\}$ קיים פסוק φ^* שקול הכתוב במערכת $\{\uparrow\}$.

בסיס האינדוקציה: פסוק אטומי: $\varphi=\varphi^*=A$.

הנחת האינדוקציה: לכל פסוק φ מאורך קטן מ- n הכתוב במערכת $\{\neg,\vee,\wedge\}$ קיים פסוק שקול φ^* הכתוב במערכת $\{\uparrow\}$.

צעד האינדוקציה: יהא φ פסוק מאורך n הכתוב במערכת $\{\neg,\vee,\wedge\}$. אז יש 3 מקרים

אם $\varphi=\neg\alpha$, אז מהנחת האינדוקציה קיים α^* הכתוב במערכת $\{\uparrow\}$ ושקול לוגית ל- ψ. ולכן $\varphi^*=\alpha^*\uparrow\alpha^*\Leftrightarrow\neg\alpha^*\Leftrightarrow\varphi$ הוא פסוק שקול לוגית ל- φ הכתוב במערכת $\{\uparrow\}$.

אם $\varphi=\alpha\vee\beta$, אז מהנחת האינדוקציה קיימים α^*,β^* הכתובים במערכת $\{\uparrow\}$ ושקולים לוגית ל- α,β בהתאמה. ולכן

$$\varphi=\alpha\vee\beta\Leftrightarrow\alpha^*\vee\beta^*\Leftrightarrow\neg(\neg\alpha^*\wedge\neg\beta^*)\Leftrightarrow\neg\alpha^*\uparrow\neg\beta^*\Leftrightarrow(\alpha^*\uparrow\alpha^*)\uparrow(\beta^*\uparrow\beta^*)=\varphi^*$$

הוא פסוק שקול לוגית ל- φ הכתוב במערכת $\{\uparrow\}$.

אם $\varphi=\alpha\wedge\beta$, אז מהנחת האינדוקציה קיימים α^*,β^* הכתובים במערכת $\{\uparrow\}$ ושקולים לוגית ל- α,β בהתאמה. ולכן

$$\varphi=\alpha\wedge\beta\Leftrightarrow\alpha^*\wedge\beta^*\Leftrightarrow\neg(\neg(\alpha^*\wedge\beta^*))\Leftrightarrow\neg(\alpha^*\uparrow\beta^*)\Leftrightarrow(\alpha^*\uparrow\beta^*)\uparrow(\alpha^*\uparrow\beta^*)=\varphi^*$$

הוא פסוק שקול לוגית ל- φ הכתוב במערכת $\{\uparrow\}$.

לכן כל פונקצית אמת ניתן להגדיר על-ידי פסוק הכתוב במערכת $\{\uparrow\}$.

(11 נק') **ג)** מצאו צורה דיסיונקטיבית נורמאלית מינימאלית עבור פסוק
$(Y\wedge\neg Z)\vee(\neg X\wedge\neg Y\wedge Z)\vee(\neg Y\wedge\neg Z)$
<u>רמז</u> אפשר להשתמש במפות קרנו.

3) א) תהא L שפה המכילה סימן יחס דו-מקומי E וסימן של שיויון.
מצאו פסוק בשפה L שמגדיר כי במבנה מתמטי $M=(|M|;E,=)$
(3 נק') **א1)** E הוא יחס שקילות
(9 נק') **א2)** E הוא יחס שקילות עם בדיוק 2 מחלקות שקילות וכל אחת מהם מכילה לא יותר מ-3 איברים.

(11 נק') **ב)** תהא L שפה המכילה סימן פעולה דו-מקומית F וסימן של שיויון.
לכל זוג מהמבנים הבאים מצאו פסוק שנכון באחד מהם ולא נכון בשני.
$M_1=(N,+),\ \ M_2=(N,\cdot),\ \ M_3=(P(N),\cup)$

ג) הוכיחו כי
(6 נק') **ג 1)** 2 גדיר במבנה $M_1=(N,+^N)$.
(5 נק') **ג 2)** $\varnothing$ גדיר במבנה $M_2=(P(N)\ ,\cup)$.

פתרון חלקי.
א2) E הוא יחס שקילות (מ-א1).
$\varphi\equiv(\exists\ a)\ (\exists\ b)\ (\neg(a\ E\ b)\ )\wedge(\forall\ c)\ (\ (c\ E\ a)\vee(c\ E\ b)\ )$ מספקת מבנה M
כאשר קיימים לפחות 2 מחלקות שקילות (חלק 1 של הנוסחה) ולא יותר מ-2 מחלקות שקילות (חלק 2 של הנוסחה).
$\psi\ \equiv(\forall\ x)\ (\exists\ s)\ (\exists\ t)\ (\exists\ p)\ (s\ E\ x\wedge t\ E\ x\wedge\ p\ E\ x\wedge$
$(\forall\ m)\ (m\ E\ x\rightarrow\ (m\ =\ s\vee m\ =t\vee m\ =\ p)\ )\ )$
ψ מספקת מבנה M כאשר כל מחלקות שקילות מכילה לא יותר מ-3 איברים.

ב) נתבונן בנוסחות $\alpha=\exists x\forall y(F(x,y)=x)$, $\beta\equiv(\forall x)(F(x,x)=x)$,
α מספקת מבנה M_2 וגם מבנה M_3 , β מספקת רק מבנה M_3.

ג1) $\phi_0(x)\equiv(\forall y)(y+x=x)$ מגדירה 0 כי היא מספקת מבנה M_1 רק בהשמה $s(x)=0$.
$\phi_1(x)\equiv\neg\phi_0(x)\wedge(\forall y)(\forall z)(y+z=x\rightarrow(y=x\vee z=x))$
$\phi_2(x)\equiv(\exists y)(\phi_1(y)\wedge(y+y=x))$
ג2) $\phi(x)\equiv(\forall y)(y\cup x=y)$