

אוניברסיטת בן-גוריון בנגב  
מדור בחינות



תאריך הבחינה: 13.08.13  
שם המרצה: גריגורי משביצקי

בוחר ב: מתמטיקה בדידה

מס' קורס: 20119661  
סמ': מועד:  
משך הבחינה: 2 שעות  
חומר עזר: אין

כל שאלה שווה 50 נק. נמקו את שלבי החישוב. נסמן ב-  $N$  קבוצה של מספרים טבעיים.

**(1 א)** נתבונן במשוואות  $X - A = B$ , כאשר  $A, B \in P(N)$  פרמטרים הנתונים ו-  $X$  משתנה. עבור אילו ערכים של הפרמטרים  $A, B$  למשוואה הנתונה אין פתרון.

**(ב)** מצאו מספר יחסים תלת-מקומיים שונים זה מזה בקבוצה של  $n$  איברים.

**(ג)** הוכיחו או הפריכו על-ידי דוגמה נגדית. לכל  $A, X, Y \in P(N)$  מתקיים:

**ג 1** אם  $A \cup X = A \cup Y$  אז בהכרח  $X = Y$ ,

**ג 2** אם  $A \Delta X = A \Delta Y$  אז בהכרח  $X = Y$ .

**פתרון חלקי. א)** אם פתרון קיים אז  $B = X - A \subseteq X$  וגם  $B \cap A = \emptyset$ . לכן אם  $B \cap A \neq \emptyset$  אז אין פתרון. אם  $B \cap A = \emptyset$  אז פתרון קיים לדוגמה  $X = B \cup A$ .

**(ב)** מספר יחסים תלת-מקומיים שונים זה מזה בקבוצה  $A$  של  $n$  איברים הוא מספר תתי קבוצות בקבוצה  $A \times A \times A$  ושווה  $2^{n^3}$ .

**ג 1** לא נכון.  $A = \{1, 2\}, X = \{1\}, Y = \{2\}$  אז מקבלים  $A \cup X = A \cup Y$  אבל  $X \neq Y$ .

**ג 2** נכון. אם  $A \Delta X = A \Delta Y$  אז  $A \Delta (A \Delta X) = A \Delta (A \Delta Y)$  לכן

$$X = (A \Delta A) \Delta X = A \Delta (A \Delta X) = A \Delta (A \Delta Y) = (A \Delta A) \Delta Y = Y$$

## שאלה 2:

נתונה מילה  $w$  (כלומר סידרה לא ריקה של אותיות) באלפבית  $X = \{a, b, c\}$ . סידרה (לא ריקה) של אותיות עוקבות ב-  $w$  נקראת תת מילה (לדוגמה עבור המילה  $U = bcbb, W = abcbbb$  היא תת מילה של  $w$  אבל  $V = ac$  היא לא תת מילה של  $w$ ). נסמן ב-  $S(w)$  את קבוצת כל תתי המילים של  $w$ . אורך של מילה הוא מספר אותיות במילה (לדוגמה אורך המילה  $U = bcbb$  שווה 4 ואורך המילה מילה  $V = ac$  שווה 2).

(א) נגדיר יחס שקילות  $\equiv$  על  $S(W)$  באופן הבא: עבור  $U, V \in S(W)$ ,  $U \equiv V$  אם ב- $U$  ו- $V$  מופיעות בדיוק אותן אותיות (לדוגמה עבור המילה  $W = abcbbb$ ,  $bc \equiv cb$  ו- $bc \equiv bcbb$ , אבל  $ab \not\equiv bc$ ).

(א1) נניח  $W = abcbbb = a^2 bcb^3$ , מצאו קבוצת מנה  $|_{\equiv} S(W)$ .

(א2) מצאו את כל המילים  $W$  כך שבכל מחלקות השקילות ב- $S(W)$  ביחס  $\equiv$  יש בדיוק איבר אחד.

(ב) נגדיר יחס סדר חלקי  $\leq_w$  על  $S(W)$  באופן הבא: עבור  $U, V \in S(W)$ ,  $U \leq_w V$  אם ב- $U$  ו- $V$  מופיעות בדיוק אותם תתי מילים באורך 2 ו- $U$  תת מילה של  $V$  (לדוגמה עבור המילה  $W = abcbbb$ ,  $bcbb \leq_w bcbbb$  אבל  $cb \not\leq_w bcbb$ ).

מצאו כל איברים מקסימאליים וכל איברים מינימאליים ב- $(S(W), \leq_w)$  עבור  $W = ((ab)^3 a)$ .

(ג) מצאו מספר יחסי סדר חלקי על קבוצה  $A = \{a, b, c, d\}$  שונים זה מזה

כך שאיברים  $a, b, c$  מינימאליים ו- $d$  מקסימאלי

(ד) מצאו מספר פונקציות חד-חד ערכיות מקבוצה של  $s$  איברים לקבוצה של  $n$  איברים.

**פתרון חלקי. א1**

$$S(a^2 bcb^3) |_{\equiv} = \{ \{a, a^2\}, \{b, b^2, b^3\}, \{c\}, \{ab, a^2 b\}, \{bc, bcb, bcb^2, bcb^3, cb, cb^2, cb^3\}, \{abc, a^2 bc, abcb, a^2 bcb, abcb^2, abcb^3, a^2 bcb^2, a^2 bcb^3\} \}$$

(א2) כאשר כל האותיות שונות זה מזה. אם  $W = \dots xab..tx\dots$  יש מחלקת שקילות עם לפחות 2 איברים.

(ב) איברים מינימאליים ב- $(S(W), \leq_w)$ :  $a, b, ab, ba, aba, bab$

איברים מקסימאליים ב- $(S(W), \leq_w)$ :  $a, b, ab, ba, (ab)^3 a$

(ג) יש  $8 = 2^3$  יחסי סדר חלקי על קבוצה  $A = \{a, b, c, d\}$  שונים זה מזה

כך שאיברים  $a, b, c$  מינימאליים ו- $d$  מקסימאלי.

(ד) יש 0 פונקציות חד-חד ערכיות מקבוצה של  $s$  איברים לקבוצה  $n$  איברים כאשר  $n < s$ . יש  $n(n-1)(n-2)\dots(n-s+1)$  פונקציות חד-חד ערכיות כאשר  $n \geq s$ .