אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
מדור בחינות

תאריך הבחינה: 24.6.14
שם המרצה: ג. משביצקי, ס. סמית
מבחן ב: מבוא למתמטיקה דיסקרטית
מס' קורס: 20119661
שנה: תשע"ד סמ': אביב מועד: א
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: דף נוסחאות מצורף

ענו על 3 השאלות בדיוק מ-4 השאלות הבאות. כל שאלה שווה 34 נקודות. הוכיחו ונמקו תשובותיכם. הניקוד המקסימאלי במבחן הוא 102. מי שיצבור 100 נקודות או יותר ציונו הסופי יהיה 100.

שאלה 1.

(17 נק') **א)** מצאו את המספר a_n של מילים באורך n (בעלי n אותיות) באלף בית A,B,C,D שלא מכילות אף אחת מתת-המילים AA, AB, BA, BB.

(17 נק') **ב)** כמה פונקציות "על" קיימות מקבוצה בת 5 איברים על קבוצה בת 3 איברים?

שאלה 2.

(12 נק') **א)** מצאו פסוק X במשתנים A,B,C כך ש- $((A\vee B)\to X)\Leftrightarrow((A\wedge B)\to(B\wedge C))$
(מספיקה דוגמה אחת). כמה פסוקים כאלה קיימים שאינם שקולים לוגית זה לזה?

נניח ש- X הוא כפסוק במשתנים A,B,C,D כמה פסוקים כאלה קיימים לא שקולים לוגית זה לזה?

(11 נק') **ב)** הוכיחו כי המערכת $\{\to,\neg\}$ היא מערכת קשרים שלמה.

(11 נק') **ג)** מצאו צורה דיסיונקטיבית נורמאלית מינימאלית עבור הפסוק
$(Y\wedge\neg Z)\vee(\neg X\wedge\neg Y\wedge Z)\vee(\neg Y\wedge\neg Z)$
<u>רמז:</u> אפשר להשתמש במפות קרנו.

שאלה 3.

א) מצאו פסוק בשפה L למבנה מתמטי $M=(|M|;R,=)$ עם יחס דו-מקומי R שמגדיר כי
(3 נק') **א1)** R הוא יחס סדר חלקי.
(9 נק') **א2)** ב- $M=(|M|;R,=)$ יש בדיוק 2 איברים מינימאליים ויש איבר מקסימום.

(11 נק') **ב)** תהא L שפה המכילה סימן פונקציה F וסימן של שוויון.
לכל זוג מהמבנים הבאים מצאו פסוק שנכון באחד מהם ולא נכון בשני.
$M_1=(C,x^2),\ M_2=(Q,2^x),\ M_3=(Q,2x+1),\ M_4=(Q,x^2)$

ג) הוכיחו כי
(6 נק') **ג 1)** המספר 2 גדיר במבנה $M_1=(N,+^N)$.
(5 נק') **ג 2)** היחס הדו-מקומי $\subseteq$ גדיר במבנה $M_2=(P(N),\cup)$.

שאלה 4.

(11 נק') **א)** כמה פתרונות טבעיים קיימים לאי-השיוויון $x_1 + x_2 + x_3 < 10$?

(11 נק') **ב)** הוכיחו כי המערכת $\{*,\circ\}$ היא מערכת קשרים לא שלמה, כאשר $A * B = \neg(A) \wedge B$ ו- $A \circ B = \neg(A \to B)$.

ג) מצאו פסוק בשפה L למבנה מתמטי $M = (|M|; E, =)$ עם יחס דו-מקומי E שמגדיר כי

(3 נק') **ג1)** E הוא יחס שקילות.

(9 נק') **ג2)** ב- $M = (|M|; E, =)$ יש מחלקת שקילות אחת עם יותר מ- 2 איברים, ובכל מחלקת שקילות אחרת יש בדיוק איבר אחד.

בהצלחה !

פתרון

פתרון שאלה 1

(1א) נקרא למילה באורך n מעל הא"ב $\{A,B,C,D\}$ שלא מכילה את אחת מתתי המילים AA, AB, BA, BB מילה טובה באורך n.

a_n הוא מספר המילים הטובות באורך n.

מילה טובה באורך n מתחילה ב D או ב C או ב B או ב A.

- אם היא מתחילה ב D: $D\underbrace{\quad\quad}_{n-1}$ אחרי D תבוא מילה טובה באורך $n-1$, יש a_{n-1} מילים כאלה. לכן יש $\boxed{a_{n-1}}$ מילים באורך n המתחילות ב D.

- אם היא מתחילה ב C אז כנ"ל. יש $\boxed{a_{n-1}}$ מילים באורך n המתחילות ב C.

- אם היא מתחילה ב B: $B\underbrace{\dots\dots}_{n-1}$ אז אסור שאחרי ה B תבוא A או ה B. לכן אחרי ה B תבוא מילה טובה באורך $n-1$ המתחילה ב C או מילה טובה באורך $n-1$ המתחילה ב D. יש a_{n-2} מילים טובות באורך $n-1$ המתחילות ב C ובאופן דומה ל D: יש a_{n-2} מילים טובות באורך $n-1$ המתחילות ב D. לכן יש $\boxed{a_{n-2}+a_{n-2}}$ מילים טובות באורך n המתחילות ב B.

- אם היא מתחילה ב A את העוקב שלה צריך להיות דווקא B !

$A\,\_\_\,\underline{\qquad}_{n-1}$ אחרי ה A תבוא מילה טובה באורך $n-1$ המתחילה ב C

או מילה טובה באורך $n-1$ המתחילה ב D, לכן יש $\boxed{a_{n-2}+a_{n-2}}$

מילים טובות <u>באורך n</u> המתחילות ב A.

מכאן שקילות נוסחת נסיגה: $a_n = a_{n-1}+a_{n-1}+(a_{n-2}+a_{n-2})+(a_{n-2}+a_{n-2})$

כלומר $a_n = 2a_{n-1}+4a_{n-2}$.

המשוואה האופיינית: $x^2-2x-4=0$, הפתרונות: $x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+16}}{2}=1\pm\sqrt{5}$

לכן הפתרון הכללי: $(*) \quad a_n=A(1+\sqrt{5})^n+B(1-\sqrt{5})^n$

<u>נמצא תנאי התחלה:</u> יש 4 מילים באורך 1: A,B,C,D. לכן $a_1=4$

יש $4^2-4=12$ מילים טובות באורך 2 לכן $a_2=12$ $\Big|$ $\underset{\text{אות 1}}{4}\cdot\underset{\text{אות 2}}{4}=16$

(פחות 4 המילים הבעייתיות: AA,AB,BA,BB)

נמצא את a_0 מהנוסחה: $a_2=2a_1+4a_0$; $a_0=\frac{a_2-2a_1}{4}=\frac{12-8}{4}=1$

תנאי התחלה: $\boxed{a_1=4,\ a_0=1}$ ולכן ב(*) נציב ונמצא את A ו B

$$\begin{cases}B=1-A\\ A=\frac{3+\sqrt5}{2\sqrt5}\end{cases} \Leftarrow \begin{cases}B=1-A\\ 4=A\cdot2\sqrt5+1-\sqrt5\end{cases} \Leftarrow \begin{cases}B=1-A\\ 4=A(1+\sqrt5)+(1-A)(1-\sqrt5)\end{cases} \Leftarrow \begin{cases}a_0=1=A+B\\ a_1=4=A(1+\sqrt5)+B(1-\sqrt5)\end{cases}$$

לכן $\begin{cases}B=\frac12-\frac{3}{2\sqrt5}\\ A=\frac12+\frac{3}{2\sqrt5}\end{cases}$

$$\boxed{a_n=\left(\frac12+\frac{3}{2\sqrt5}\right)(1+\sqrt5)^n+\left(\frac12-\frac{3}{2\sqrt5}\right)(1-\sqrt5)^n} \leftarrow$$

מספר המילים הטובות באורך n.

(ג) צריך לספור את מספר הפונקציות $f:\{1,2,3,4,5\}\to\{1,2,3\}$ שהן על.
(כלומר $rng(f)=\{1,2,3\}$).

נשתמש בעקרון ההכלה וההפרדה.

נגדיר קבוצות: $U=\{f \mid f:\{1,..,5\}\to\{1,2,3\}\}$ (כל הפונקציות מ-$\{1,..,5\}$ ל-$\{1,2,3\}$)

$$A_1=\{f\in U \mid 1\notin rng(f)\}$$
$$A_2=\{f\in U \mid 2\notin rng(f)\}$$
$$A_3=\{f\in U \mid 3\notin rng(f)\}$$

אנו מחפשים את $|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3|$ (מספר הפונקציות ב-U שהן לא ב-A_1 וגם לא ב-A_2 וגם לא ב-A_3 כלומר $1\in rng(f)$ וגם $2\in rng(f)$ וגם $3\in rng(f)$ כלומר f על). לפי עקרון ההכלה וההפרדה: $|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3|=S_0-S_1+S_2-S_3$

<u>חישוב S_0:</u> $S_0=|U|=|\{1,2,3\}|^{|\{1..5\}|}=3^5$ (מספר הפונקציות $g:A\to B$ הוא $|B|^{|A|}$)

<u>חישוב S_1:</u> $S_1=|A_1|+|A_2|+|A_2|$. $|A_1|=|\{2,3\}|^{|\{1,..,5\}|}=2^5$

וגם $|A_2|=|\{1,3\}|^{|\{1..5\}|}=2^5$ וגם $|A_3|=2^5$ לכן $S_1=3\cdot 2^5$

<u>חישוב S_2:</u> $S_2=|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_2\cap A_3|$, $|A_1\cap A_2|=|\{3\}|^{|\{1,..,5\}|}=1^5=1$

וגם $|A_1\cap A_3|=|A_2\cap A_3|=1$ לכן $S_2=3$

<u>חישוב S_3:</u> $S_3=|A_1\cap A_2\cap A_3|$, $|A_1\cap A_2\cap A_3|=|\emptyset|^{|\{1..5\}|}=0^5=0$

לכן התשובה: $|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3|=3^5-3\cdot 2^5+3-0=243-96+3=\boxed{150}$

פתרון נוסף

כל פונקציה $f:\{1,2,3,4,5\}\to\{1,2,3\}$ שהיא על אפשר לראות אותה כמילה באורך 5 מעל הא"ב $\{1,2,3\}$ כך שכל אחת מהאותיות 1, 2, 3 מופיעה במילה.

לדוגמה, הפונקציה

$$\begin{array}{l} 1 \to 2 \\ 2 \to 1 \\ 3 \to 2 \\ 4 \to 3 \\ 5 \to 3 \end{array}$$

מתאימה המילה ← $\frac{2}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{5}$

יש 2 אפשרויות:

(1) a,a,a,b,c (יש אות שמופיעה 3 פעמים) לבחור את האות מתוך $\{1,2,3\}$ שיופיע 3 פעמים יש $\binom{3}{1}$ דרכים ולאחר מכן המילה שניתן ליצור מ $aaabc$ הוא $\frac{(3+1+1)!}{3!\cdot1!\cdot1!}=\frac{5!}{3!}$

בסה"כ $\boxed{\binom{3}{1}\cdot\frac{5!}{3!}}$

(2) a,a,b,b,c (יש 2 אותיות שמופיעות פעמיים) לבחור את האותיות מתוך $\{1,2,3\}$ שיופיע פעם אחת (כלומר c) יש $\binom{3}{1}$ דרכים ואז מספר המילים שניתן ליצור מ $aabbc$ הוא $\frac{(2+2+1)!}{2!\cdot2!\cdot1!}=\frac{5!}{2!\cdot2!}$

בסה"כ $\boxed{\binom{3}{1}\cdot\frac{5!}{2!\cdot2!}}$

מכאן התשובה היא:

$$\binom{3}{1}\cdot\frac{5!}{3!}+\binom{3}{1}\cdot\frac{5!}{2!\cdot2!}=3\cdot20+3\cdot30=\boxed{150}$$

<u>הערה:</u> הניסוח הקודם שגוי מפני שזהו בספירות כפולות ($3!\,5$) לאחר יש התאמה מבנית וקשה למצוא את כולן.

פתרון לשאלה 2

(1ג) רוצים ש $(A\vee B)\to X$ יהיה שקול לוגית ל $(A\wedge B)\to(B\wedge C)$

כלומר שתהיה להם אותה טבלת אמת. נסתכל את הטבלה של $(A\wedge B)\to(B\wedge C)$

ונבדוק מתי היא מחזירה F $\to$ $(A\vee B)\to X$ ואז נראה מהם הערכים

ש X יכול לקבל.

מספר השמה	A	B	C	$(A\wedge B)\to(B\wedge C)$			$(A\vee B)\to X$		
1	F	F	F	F	T		F	T	F/T
2	F	F	T	F	T		F	T	F/T
3	F	T	F	F	T		T	T	T
4	F	T	T	F	T		T	T	T
5	T	F	F	F	T		T	T	T
6	T	F	T	F	T		T	T	T
7	T	T	F	T	F	F	T	F	F
8	T	T	T	T	T	T	T	T	T

גורר

בהשמות 1 ו־2

X יכול לקבל ערך F או T

לשאר ההשמות X

חייב לקבל את הערך הנדרש.

לכן מספר הבחירות X

כך שהיא שקולה לוגית

הפסוק $(A\vee B)\to X$ שקול לוגית

ל $(A\wedge B)\to(B\wedge C)$ הוא $2\cdot2\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1=\boxed{4}$

דוגמא ל X כזה (עם השמות 1 ו־2 F) נציג בצורה דיסיונקטיבית נורמלית מלאה)

$$X=(\neg A\wedge B\wedge\neg C)\vee(\neg A\wedge B\wedge C)\vee(A\wedge\neg B\wedge\neg C)\vee(A\wedge\neg B\wedge C)\vee(A\wedge B\wedge C)$$

(3) (4) (5) (6) (8)

- אם מוסיפים ל X גם D יש לנו 16 שורות בטבלת האמת של המשתנים A,B,C,D. (שימו לב D הראשון של הטבלה נראה כך:)

	D	A	B	C	$(A\wedge B)\to(B\wedge C)$	$(A\vee B)\to X$	
8 שורות	F ⋮ F	*	*	*	*	*	F/T F/T T ⋮
8 שורות	T ⋮ T	o	o	o	o	o	F/T F/T T ⋮

מכיוון ש D לא מופיע ב $(A\wedge B)\to(B\wedge C)$

נקבל אותה טבלה * בדיוק כמו בטבלה

כאן למעלה ונקבל עוד בדיוק אותה טבלה

ברמות o. לכן מספר האפשרויות X

הריתי שקולה לוגית כזאת הוא

$2\cdot2\cdot1\cdot1\cdots1\cdot2\cdot2\cdot1\cdot1\cdots1=\boxed{16}$

(ג) נוכיח כי $\{\neg,\to\}$ היא מערכת קשרים שלמה.

אנו יודעים ש $\{\wedge,\vee,\neg\}$ היא מערכת קשרים שלמה. נראה כי כל אחד מהקשרים $\neg$, $\vee$, $\wedge$ ניתן לביטוי בעזרת הקשרים ב $\{\neg,\to\}$.

$$\boxed{\neg A \Leftrightarrow \neg A}$$

A	B	$A\to B$	$(\neg A)\vee B$
F	F	T	T
F	T	T	T
T	F	F	F
T	T	T	T

רואים מהטבלה ($A\to B \Leftrightarrow (\neg A)\vee B$ לכל השמה)

ש $A\to B \Leftrightarrow (\neg A)\vee B$ לכן $(\neg A)\to B \Leftrightarrow A\vee B$ כלומר $\boxed{A\vee B \Leftrightarrow (\neg A)\to B}$

מ $A\to B \Leftrightarrow (\neg A)\vee B$ נקבל $A\to(\neg B)\Leftrightarrow(\neg A)\vee(\neg B)$ לפי דה-מורגן

לכן $A\to(\neg B)\Leftrightarrow \neg(A\wedge B)$ $\boxed{A\wedge B \Leftrightarrow \neg(A\to(\neg B))}$

נוכיח את הטענה הבאה:

<u>טענה:</u> לכל פסוק φ במערכת $\{\wedge,\vee,\neg\}$ קיים פסוק φ^* במערכת $\{\neg,\to\}$ כך ש $\varphi\Leftrightarrow\varphi^*$.

<u>הוכחה</u>

באינדוקציה על מבנה הפסוק.

(1) אם $\varphi=p$ הוא משתנה פסוקי אז נקח $\varphi=p=\varphi^*$, ברור ש φ^* במערכת $\{\neg,\to\}$ וברור ש $\varphi\Leftrightarrow\varphi^*$. לכן הטענה נכונה לכל משתנה פסוקי.

(2) יהי φ פסוק במערכת $\{\wedge,\vee,\neg\}$ (נניח φ לא משתנה פסוקי)
נניח שהטענה נכונה לכל פסוק α כך ש $|\alpha|<|\varphi|$ (האורך של α קטן ממש מהאורך של φ) <u>נוכיח</u> שהטענה נכונה עבור φ.

מכיוון ש φ לא משתנה פסוקי, ו φ במערכת $\{\vee,\wedge,\neg\}$, קיימים פסוקים α, β במערכת $\{\vee,\wedge,\neg\}$ כך ש $\varphi=(\neg\alpha)$ או $\varphi=(\alpha\vee\beta)$ או $\varphi=(\alpha\wedge\beta)$.

- אם $\varphi=(\neg\alpha)$ אז $|\varphi|>|\alpha|$ $(|\varphi|=|\alpha|+3)$ לכן לפי הנחת האינדוקציה הטענה נכונה עבור α, לכן קיים פסוק α^* במערכת $\{\neg,\rightarrow\}$ כך ש $\alpha^*\Leftrightarrow\alpha$ לכן $\neg\alpha^*\Leftrightarrow\neg\alpha$ נגדיר $\varphi^*=(\neg\alpha^*)$ אז φ^* במערכת $\{\neg,\rightarrow\}$ וגם כי $\varphi^*\Leftrightarrow\varphi$.

- אם $\varphi=(\alpha\vee\beta)$ אז $|\varphi|>|\alpha|,|\beta|$ $\left(|\varphi|=|\alpha|+|\beta|+3\right)$ לכן הטענה נכונה עבור α ועבור β, לכן קיימים פסוקים α^*, β^* במערכת $\{\neg,\rightarrow\}$ כך ש $\alpha^*\Leftrightarrow\alpha$ ו $\beta^*\Leftrightarrow\beta$.
לכן $\alpha^*\vee\beta^*\Leftrightarrow\alpha\vee\beta$ מהשקילות לפני הטענה אנו יודעים ש $\alpha^*\vee\beta^*\Leftrightarrow(\neg\alpha^*)\rightarrow\beta^*$. נגדיר $\varphi^*=(\neg\alpha^*)\rightarrow\beta^*$ אז φ^* במערכת $\{\neg,\rightarrow\}$ ו $\varphi^*\Leftrightarrow\varphi$.

- אם $\varphi=(\alpha\wedge\beta)$ אז $|\varphi|>|\alpha|,|\beta|$ לכן הטענה נכונה עבור α ו β לכן קיימים פסוקים α^*, β^* במערכת $\{\neg,\rightarrow\}$ כך ש $\alpha^*\Leftrightarrow\alpha$ ו $\beta^*\Leftrightarrow\beta$
לכן $\alpha^*\wedge\beta^*\Leftrightarrow\alpha\wedge\beta$, אנו יודעים ש $\alpha^*\wedge\beta^*\Leftrightarrow\neg(\alpha^*\rightarrow(\neg\beta^*))$.
נגדיר $\varphi^*=\neg(\alpha^*\rightarrow(\neg\beta^*))$ אז φ^* במערכת $\{\neg,\rightarrow\}$ ו $\varphi^*\Leftrightarrow\varphi$.

הוכחנו שהטענה נכונה עבור φ. לכן לפי עקרון האינדוקציה על מבנה הפסוק הטענה נכונה לכל פסוק (במערכת $\{\wedge,\vee,\neg\}$). מש"ל

עכשיו נוכיח כי $\{\neg,\to\}$ מערכת קשרים שלמה.

יהא $f:\{F,T\}^n\to\{F,T\}$ טבלת אמת כלשהי. אז מכיוון ש- $\{\wedge,\vee,\neg\}$ מערכת קשרים שלמה, קיים פסוק φ בקשרים $\{\wedge,\vee,\neg\}$ כך שטבלת האמת של φ שווה ל- f.

מהלמה שהוכחנו אני יודע שקיים פסוק φ^* בקשרים $\{\neg,\to\}$ כך ש- $\varphi\Leftrightarrow\varphi^*$, כלומר טבלת האמת של φ^* שווה לטבלת האמת של φ. לכן טבלת האמת של φ^* שווה ל- f. לכן $\{\neg,\to\}$ מערכת קשרים שלמה.

(ג)

נתון: $(y\wedge\neg z)\vee(\neg x\wedge\neg y\wedge z)\vee(\neg y\wedge\neg z)$

כלומר ($\bar x=\neg x$, $\cdot=\wedge$, $+=\vee$)

$y\bar z+\bar x\bar y z+\bar y\bar z$

נבנה מפת קרנו של הפסוק.

		00 $\bar y\bar z$	01 $\bar y z$	11 yz	10 $y\bar z$
0	$\bar x$	1	1		1
1	x	1			1

המלבן 1 1 / 1 1 נותן: $\bar z$

המלבן 1 1 נותן: $\bar x\bar y$

לכן הפסוק המינימלי (קנוני) השקול לפסוק שלנו הוא $\bar z+\bar x\bar y$

כלומר $\boxed{(\neg z)\vee(\neg x\wedge\neg y)}$

פתרון שאלה 3

נתונה השפה $L=(R,=)$. כאשר R סימן יחס דו-מקומי.

(א) ניתן לבנות פסוק בשפה L שאומר: R יחס סדר חלקי.

הפסוק $\varphi_1 \equiv \forall x(xRx)$ אומר: R יחס רפלקסיבי.

הפסוק $\varphi_2 \equiv \forall x\forall y(xRy \to yRx)$ אומר: R יחס סימטרי.

הפסוק $\varphi_3 \equiv \forall x\forall y\forall z(((xRy)\wedge(yRz))\to xRz)$ אומר: R יחס טרנזיטיבי.

(הערה: xRy זהו הכתיב של $R(x,y)$.)

והפסוק $\boxed{\varphi_{P.O} \equiv \varphi_1\wedge\varphi_2\wedge\varphi_3}$ אומר: R יחס סדר חלקי.
($P.O$ = Partial Order)

(ב) ניתן לבנות פסוק בשפה L שאומר: R יחס סדר חלקי ויש לו בדיוק 2 איברים מינימליים ויש לו גם איבר מקסימום.

נבנה נוסחה עזר שאומרת x איבר מינימלי: $\varphi_{minimal}(x)\equiv\forall y(yRx\to y=x)$

ונבנה עוד נוסחה עזר שאומרת x איבר מקסימום: $\varphi_{maximum}(x)\equiv\forall y(yRx)$

נבנה את הפסוק כולו:

$$\psi\equiv\varphi_{P.O}\wedge\exists x_1\exists x_2\left[\varphi_{minimal}(x_1)\wedge\varphi_{minimal}(x_2)\wedge x_1\neq x_2\wedge\forall z(\varphi_{minimal}(z)\to(z=x_1\vee z=x_2))\right]$$

$$\wedge\,\exists x_3\,\varphi_{maximum}(x_3)$$

(הערה: $x_1\neq x_2$ זהו הכתיב של $\neg(x_1=x_2)$)

(ג) נתונה השפה $L=(F,=)$ כאשר F סימן פונקציה חד-מקומי.

ונתונים המבנים הבאים עבור L:

$$M_1=(\mathbb{C},x^2),\quad M_2=(\mathbb{Q},2^x),\quad M_3=(\mathbb{Q},2x+1),\quad M_4=(\mathbb{Q},x^2)$$

לכל שני מבנים נמצא פסוק בשפה L שנכון באחד מהם ולא נכון בשני.

<u>עבור M_1,M_2:</u> $2^x:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ היא פונקציה חח"ע, $x^2:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ לא חח"ע

($x=y \Leftarrow x-y=0 \Leftarrow 2^{x-y}=1 \Leftarrow 2^x=2^y$, $(-1)^2=1^2$ לכן x^2 לא חח"ע)

נגדיר פסוק שאומר: F חח"ע:

$$\varphi_1\equiv\forall x\forall y\left(F(x)=F(y)\longrightarrow x=y\right)$$

φ_1 נכון ב-M_2 ולא נכון ב-M_1.

<u>עבור M_1,M_3:</u> $2x+1:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ היא חח"ע ($x=y \Leftarrow 2x+1=2y+1$)

$x^2:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ לא חח"ע לכן φ_1 נכון ב-M_3 ולא נכון ב-M_1.

<u>עבור M_1,M_4:</u> $x^2:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ היא פונקציה על (לכל $y\in\mathbb{C}$ קיים $x\in\mathbb{C}$ כך ש-$x^2=y$)

$x^2:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ היא לא על (לא קיים $x\in\mathbb{Q}$ כך ש-$x^2=2$)

נגדיר פסוק שאומר: F על:

$$\varphi_2\equiv\forall y\exists x\left(F(x)=y\right)$$

φ_2 נכון ב-M_1 ולא נכון ב-M_4.

<u>עבור M_2, M_3:</u> $2^x:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ היא לא סוריקטיבית (עבור $y<0$ אין $x\in\mathbb{Q}$ כך ש $2^x=y$)

$2x+1:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ היא סוריקטיבית

(אם $y\in\mathbb{Q}$ אז $\frac{y-1}{2}\in\mathbb{Q}$ ו $2\left(\frac{y-1}{2}\right)+1=y$, ולכן קיים $x\in\mathbb{Q}$ כך ש $2x+1=y$ ($x=\frac{y-1}{2}$)).

לכן φ_2 נכון ב M_3 ולא נכון ב M_2.

<u>עבור M_2, M_4:</u> $2^x:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ היא חח"ע, $x^2:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ לא חח"ע ($(-1)^2=1^2$)

לכן φ_1 נכון ב M_2 ולא נכון ב M_4

<u>עבור M_3, M_4:</u> $2x+1:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ חח"ע. $x^2:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ לא חח"ע

לכן φ_1 נכון ב M_3 ולא נכון ב M_4

<u>הערה:</u> ניתן לפתור את התרגיל בדרך קצרה יותר: רושמים את הפסוקים φ_1 ו φ_2 ואז יש טבלה:

מבנה שהפונקציה בו היא חח"ע (φ_1)	מבנה שהפונקציה בו היא על (φ_2)
M_2	M_1
M_3	M_3

לכן φ_1 ו φ_2 מבדילים בין M_4 לשאר המבנים

φ_1 מבדילה בין M_1 ו M_2, M_3

φ_2 מבדילה בין M_2 ו M_3

(ג)

(ג) נראה כי 2 גדיר במבנה $M_1=(\mathbb{N},+^{\mathbb{N}})$ (כאשר $L=(F,=)$ ו-F סימן פונקציה 2-מקומי).

- נגדיר את 0 ב-M_1:

$$\varphi_0(x) \equiv (F(x,x)=x)$$

($x=0 \Leftarrow x+x=x$ ב-$\mathbb{N}$).

- נגדיר את 1 ב-M_1:

$$\varphi_1(x) \equiv \forall x_1 \forall x_2 \left[x=F(x_1,x_2) \to (\varphi_0(x_1) \vee \varphi_0(x_2)) \right] \wedge \neg\varphi_0(x)$$

(אלה הנימוק: אם $x=x_1+x_2$ אז ($x_1=0$ או $x_2=0$) מתקיים רק אם $x=1$ או $x=0$
אבל אז כן נדרוש גם $x\neq 0$ ולכן רק $x=1$ מקיים את $\varphi_1(x)$).

- ולבסוף נגדיר את 2 ב-M_1:

$$\boxed{\varphi_2(x) \equiv \forall y \left(\varphi_1(y) \to x=F(y,y)\right)}$$

(הנימוק מאותו: אם $y=1$ אז $x=y+y$, כלומר $x=2$).

<u>פתרון נוסף</u>

$$\psi_2(x) \equiv \exists x_0 \exists x_1 \left[x_0 \neq x_1 \wedge x=x_0+x \wedge x=x_1+x_1 \right.$$
$$\left. \wedge \forall y \forall z \left(x=y+z \to (y=x_0 \vee y=x_1 \vee y=x) \right) \right]$$

(<u>הערה:</u> רשמתי $x=x_0+x$ וזה דומה ל-$x=F(x_0,x)$ רק לצורך הקריאות)

(2ג) לכל שתי קבוצות A,B מתקיים: $A\subseteq B$ אם"ם $A\cup B=B$

לכן הנוסחה הבאה מגדירה את היחס $\subseteq$ במבנה $M_2=(P(\mathbb{N}),\cup)$
(בשפה $L=(F,=)$ כאשר F סימן פונקציה דו-מקומית)

$$\varphi_{\subseteq}(x,y) \equiv (F(x,y)=y)$$

(צ"ל $x\cup y=y$)

<u>תיקון קטן</u>

לכל שתי קבוצות A,B מתקיים: $A\subseteq B$ אם"ם קיימת קבוצה C כך ש- $A\cup C=B$

לכן הנוסחה הבאה מגדירה את היחס $\subseteq$ במבנה $M_2=(P(\mathbb{N}),\cup)$

$$\psi_{\subseteq}(x,y) \equiv \exists z\,(F(x,z)=y)$$

פתרון שאלה 4

(א.) נרצה את מספר הפתרונות בטבעיים של אי-השוויון $x_1+x_2+x_3<10$.

כלומר מחפשים את מספר השלשות הסדורות (x_1,x_2,x_3) שמקיימות $x_i\in W$ ו- $x_1+x_2+x_3\le 9$, נסמן $x_1+x_2+x_3=9-a$ כאשר $a\in\mathbb{N}$

(אם $9-a<0$ אז יש 0 פתרונות). לכן $x_1+x_2+x_3+a=9$, $x_i,a\in\mathbb{N}$

מספר השלשות (x_1,x_2,x_3) שמקיימות את $x_1+x_2+x_3\le 9$, $x_i\in\mathbb{N}$

שווה למספר הרביעיות (x_1,x_2,x_3,a) המקיימות את $x_1+x_2+x_3+a=9$, $x_i,a\in\mathbb{N}$.

(למשל לשלשה $(2,1,3)$ מתאימה הרביעייה $(2,1,3,3)$).

כלומר יש לחלק 9 כדורים ל-4 תאים $\underbrace{\quad}_{x_1}|\underbrace{\quad}_{x_2}|\underbrace{\quad}_{x_3}|\underbrace{\quad}_{a}$ שנבדלים ע"י

3 מחיצות. כלומר מספר הפתרונות של $x_1+x_2+x_3+a=9$, $x_i,a\in\mathbb{N}$

שווה למספר הסידורים (במקום $9+3=12$) של 9 ○ ו-3 |, כלומר

$\binom{9+3}{3}$ וזה בדיוק $\binom{12}{3}=\frac{12\cdot11\cdot10}{6}=\boxed{220}$

פתרון נוסף: נרצה את מספר הפתרונות של $x_1+x_2+x_3+a=9$, $x_i,a\in\mathbb{N}$

בעזרת פונ' יוצרת. נסמן ב-a_n את מספר הפתרונות של $x_1+x_2+x_3+a=n$

עם התנאים $x_i,a\in\mathbb{N}$, אז הפונ' היוצרת של הסדרה a_n היא:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=(1+x+x^2+\dots)^4=\frac{1}{(1-x)^4}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+4-1}{n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+3}{n}x^n$$

אנו מחפשים את a_9 המקדם של x^9 ב-$f(x)$. ולכן $a_9=\binom{9+3}{9}=\binom{12}{9}=\boxed{220}$.

תרגיל נוסף

נסמן ב b_n את מספר הפתרונות של $x_1+x_2+x_3=n$

עם הגבלות: $x_i \geq 0$. אז הפונקציה היוצרת של הסדרה b_n היא

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = (1+x+x^2+\dots)^3 = \frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+3-1}{n}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{n}x^n$$

$x_1+x_2+x_3 \leq 9$ שקול ל $x_1+x_2+x_3=0$ או $x_1+x_2+x_3=1$ או ..... או $x_1+x_2+x_3=9$

לכן מס' פתרונות = $b_0+b_1+b_2+\dots+b_9$ לפי עקרון החיבור

$$b_0+b_1+\dots+b_9=\binom{2}{0}+\binom{3}{1}+\binom{4}{2}+\binom{5}{3}+\binom{6}{4}+\binom{7}{5}+\binom{8}{6}+\binom{9}{7}+\binom{10}{8}+\binom{11}{9}$$

$$=1+3+6+10+15+21+28+36+45+55=\boxed{220}$$

(ב) משלימים קשרים חלקיים: $A * B = (\neg A) \wedge B$ ו- $A \circ B = \neg(A \to B)$

נראה כי $\{*, \circ\}$ לא מערכת קשרים שלמה.

נכתוב את טבלאות האמת
של $*$ ו- $\circ$

A	B	$t_*(A,B)$: $A * B$	$t_\circ(A,B)$: $A \circ B$
F	F	F	F
F	T	T	F
T	F	F	T
T	T	F	F

שים לב שכאשר ל-A ו-B ערך F אז
מקבלים גם כי $A*B$ ו- $A\circ B$ ערך F
כלומר $t_*(F,F) = t_\circ(F,F) = F$. זה מביא אותנו לטענה הבאה:

טענה: נניח θ השמה שנותנת ערך F לכל משתנה פסוקי.
אז לכל פסוק φ במערכת $\{*, \circ\}$ מתקיים: $val(\varphi, \theta) = F$

הוכחה (באינדוקציה על אורך הפסוק)

(1) אם p משתנה פסוקי אז לפי הגדרת ההשמה θ, יש $\theta(p) = F$
ולכן $val(p, \theta) = \theta(p) = F$ ולכן הטענה נכונה לכל משתנה פסוקי.

(2) יהי φ פסוק במערכת $\{*, \circ\}$ (ונניח φ לא משתנה פסוקי)
נניח שהטענה נכונה לכל פסוק α במערכת $\{*, \circ\}$ שמקיים $|\alpha| < |\varphi|$
(כלומר אורכו של α קטן ממש מאורכו של φ) צ"ל: הטענה נכונה עבור φ.

מכיוון ש- φ לא משתנה פסוקי קיימים פסוקים α, β במערכת $\{*, \circ\}$
כך ש: $\varphi = (\alpha * \beta)$ או $\varphi = (\alpha \circ \beta)$.

לפי ההנחה כי $|\varphi| > |\alpha|, |\beta|$ $(|\varphi| = |\alpha| + |\beta| + 3)$ אז הטענה נכונה עבור
α ו- β.

נניח $Val(\alpha,g)=F$ ו- $Val(\beta,g)=F$, אז

$$Val((\alpha*\beta),g)=t_*(Val(\alpha,g),Val(\beta,g))=t_*(F,F)=F$$

$$Val((\alpha\circ\beta),g)=t_\circ(Val(\alpha,g),Val(\beta,g))=t_\circ(F,F)=F$$

כלומר $Val(\varphi,g)=F$. הוכחנו באינדוקציה על מבנה φ.

לכן ע"פ אקסיומת האינדוקציה זה נכון לכל פסוק, הטענה נכונה לכל פסוק (המורכב מ- $\{*,\circ\}$).

מש"ל

נקח טבלה $f:\{F,T\}^n\longrightarrow\{F,T\}$ המקיימת $f(F,F,\dots,F)=T$

אז לפי הטענה שהוכחנו לכל פסוק φ המורכב מ- $\{\circ,*\}$ מתקיים $Val(\varphi,g)=F$ כאשר g היא ההשמה שנותנת ערך F לכל משתני הפסוק.

ולכן לא נוכל למצוא פסוק φ המורכב מ- $\{\circ,*\}$ עבור n משתנים בסיסיים

לכן לא קיים פסוק φ המורכב מ- $\{\circ,*\}$ כך שטבלת האמת של φ היא הטבלה f. לכן $\{*,\circ\}$ לא מערכת קשרים שלמה.

ג) נתונה השפה $L=(E,=)$ כאשר E סימן יחס דו-מקומי.

(ג1) נכתוב פסוק בשפה L האומר: E יחס שקילות.

הפסוק $\varphi_1 \equiv \forall x(xEx)$ אומר E רפלקסיבי (על העולם של המבנה)

הפסוק $\varphi_2 \equiv \forall x\forall y(xEy \rightarrow yEx)$ אומר E סימטרי.

הפסוק $\varphi_3 \equiv \forall x\forall y\forall z((xEy \wedge yEz) \rightarrow xEz)$ אומר E טרנזיטיבי.

והפסוק $\boxed{\varphi_{Eq} \equiv \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3}$ אומר E יחס שקילות.

(ג2) נכתוב פסוק בשפה L שאומר: E יחס שקילות ויש לו מחלקת שקילות אחת עם לפחות 3 איברים וכל מחלקת שקילות אחרת יש בדיוק איבר אחד.

הנוסחה $\alpha_{\neq}(x_1,x_2,x_3) \equiv (x_1\neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge x_2 \neq x_3)$ אומרת x_1,x_2,x_3 שונים.

הנוסחה $\beta_{\sim}(x_1,x_2,x_3) \equiv (x_1 E x_2)\wedge(x_1 E x_3)\wedge(x_2 E x_3)$ אומרת x_1,x_2,x_3 שקולים

והנוסחה שלנו היא:

$$\varphi \equiv \underbrace{\varphi_{Eq}}_{\text{E יחס שקילות}} \wedge \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \Big[\alpha_{\neq}(x_1,x_2,x_3) \wedge \beta_{\sim}(x_1,x_2,x_3) \wedge \forall y\big((\neg(yEx_1)) \longrightarrow \underbrace{\forall z(zEy \rightarrow z=y)}_{\text{אומר: מחלקת השקילות של y היא יחידון}}\big)\Big]$$

אומר לכל y שלא נמצא במחלקת השקילות של x_1 (!x_2,x_3), מחלקת השקילות שלו היא יחידון.