

## תרגיל 2 . יחס שקילות. יחס סדר חלקי.

- (1) תהא  $R$  יחס על הקבוצה  $P(N)$ . בכל אחד מהיחסים הבאים  
(I) בדקו האם  $R$  יחס שקילות,  
(II) מצאו את המחלקת שקילות של  $A = \{2,5,14\}$  ביחס  $R$ .

- (א)  $ARB$  מתקיים אם ורק אם  $1 \notin A \Delta B$ .  
(ב)  $ARB$  מתקיים אם ורק אם  $A \Delta B$  קבוצה סופית.  
(ג)  $ARB$  מתקיים אם ורק אם  $A \Delta B$  קבוצה אין סופית.  
(ד)  $ARB$  מתקיים אם ורק אם  $A \Delta B$  מוכלת בקבוצת המספרים הראשוניים.

- (2) תהי  $A$  קבוצה ותהי  $X \subseteq P(A)$ . נגדיר יחס  $R$  על  $P(A)$  באופן הבא:

לכל  $B, C \in P(A)$  מתקיים  $BRC$  אם ורק אם  $B \Delta C \in X$ . הוכח כי

- (א)  $R$  יחס סימטרי,  
(ב)  $R$  רפלקסיבי אם ורק אם  $\emptyset \in X$ .  
(ג)  $R$  טרנזיטיבי אם ורק אם  $X$  סגורה תחת  $\Delta$ .  
(3) מצא דוגמה של יחס דו-מקומי על קבוצה  $(I, N, II)$  ישרים, קטעים ונקודות, (III) אנשים

- (א) רפלקסיבי, סימטרי אבל לא טרנזיטיבי  
(ב) רפלקסיבי, טרנזיטיבי אבל לא סימטרי ולא אנטי-סימטרי  
(ג) שקילות וגם סדר חלקי  
(ד) סימטרי, טרנזיטיבי אבל לא רפלקסיבי

- (4) (א) נגדיר יחס שקילות  $S$  על קבוצת המספרים הטבעיים  $N$  באופן הבא:

לכל  $a$  ו- $b$  ב-  $N, S, (a,b) \in S$  אם ורק אם יש ל- $a$  ול- $b$  אותם מחלקים הראשוניים וגם בפירוק של- $a > 1$  ושל- $b > 1$  יש אותו מספר של הגורמים הראשוניים. למשל,  $(12,18) \in S$  אבל  $(12,36) \notin S$  (ל-12 ול-36 יש אותם מחלקים הראשוניים 2 ו-3 אבל ל-12 יש 3 גורמים ראשוניים ול-36 יש 4 גורמים ראשוניים). נסמן ב- $D(m)$  קבוצת כל המחלקים הטבעיים של  $m$ .

- (א) מצאו קבוצת מנה  $D(100)/_S$  של  $D(100)$  לפי יחס  $S$ .  
(ב) מצאו דוגמאות של  $m$  כך ש-  $D(m)$  בכל מחלקת שקילות לפי יחס  $S$  יש איבר אחד בלבד.  
(ג) מצאו כל מחלקות שקילות ב- $N$  לפי יחס  $S$  שמכילות בדיוק איבר אחד.

5) לכל אחד מהיחסים הבאים (I) הוכח כי הוא יחס סדר חלקי, (II) בדוק אם הוא יחס סדר קווי, (III) מצא את קבוצה של איברים מקסימליים ואת קבוצה של איברים מינימליים.

- (א) יחס  $\leq$  על  $N$ .  
 (ב) יחס  $\subseteq$  על  $P(N)$ .  
 (ג) יחס  $|$  על  $N$  המוגדר על-ידי  $a|b \Leftrightarrow (\exists c \in N)(ac = b)$  ז"א  $a$  מחלק את  $b$ .  
 (ד) יחס  $|$  על  $N \setminus \{0,1\}$  המוגדר על-ידי  $a|b \Leftrightarrow (\exists c \in N)(ac = b)$  ז"א  $a$  מחלק את  $b$ .

6) נגדיר יחס  $S$  על קבוצת המספרים הטבעיים  $N$  באופן הבא:

לכל  $a$  ו- $b$  ב- $N$ ,  $(a,b) \in S$  אם ורק אם יש ל- $a$  ול- $b$  אותם מחלקים הראשוניים וגם  $a$  מחלק את  $b$ . למשל,  $(6,18) \in S$ , אבל  $(9,36) \notin S$ .

(א) הוכיחו ש- $S$  הוא יחס סדר חלקי על  $N$ . בדקו האם  $S$  הוא יחס סדר קווי.

(ב) מצאו כל איברים מינימאליים בקבוצה  $N$  עם יחס  $S$

(ג) מצאו כל איברים מקסימאליים בקבוצה  $N$  עם יחס  $S$ .

7) (א) מצאו את כל יחסי שקילות  $R$  בקבוצה  $\{1,2,3,4,5\}$  שמקימות תנאים הבאים:  
 $(1,2); (3,4) \in R$ . (אפשר להגדיר  $R$  דרך חלוקה).

(ב) מצאו את כל יחסי סדר חלקי בקבוצה  $\{1,2,3,4,5\}$  שמקימות תנאים הבאים:  
 1 הוא איבר מינימום, ו-3, 4 הם איברים מקסימאליים (אפשר לשרטט בצורה גראפית).

8) הוכיחו כי  $P$  הוא יחס סדר חלקי על קבוצה  $A$  אם ורק אם  
 $P^2 \subseteq P, P \cap P^{-1} = Id_A, Id_A \subseteq P$

9) יחס דו-מקומי  $T$  על קבוצה  $\{2,3,4,12\} \times \{2,3,12\}$  מוגדר על-ידי  $((x,y), (z,t)) \in T$  אם ורק אם  $z$  מתחלק ב- $x$  ו- $t$  מתחלק ב- $y$  (חילוק רגיל ב- $N$ ). בדקו כי  $T$  סרטטו גרף של יחס סדר חלקי  $T$  בקבוצה הנתונה. מצאו איברים מקסימאליים, מינימאליים, מקסימום ומינימום אם קיים.

10) יחס דו-מקומי  $T$  על קבוצת זוגות של מספרים טבעיים שונים מ-1  $(N \setminus \{1\}) \times (N \setminus \{1\})$  מוגדר על-ידי  $((x,y), (z,t)) \in T$  אם ורק אם  $z$  מתחלק ב- $x$  או  $x = z$  ו- $t$  מתחלק ב- $y$ . אם  $((x,y), (z,t)) \in T$  אז אומרים כי  $(x,y)$  תחת  $(z,t)$  או  $(z,t)$  מעל  $(x,y)$  (1) בדקו כי  $T$  הוא יחס סדר חלקי  
 (2) מצאו כל איברים מינימאליים ב- $T$  הקטנים מ- $(4,6)$  וכל איברים מקסימאליים ב- $T$ .  
 (3) סרטטו קבוצה סדורה חלקית של כל איברים הקטנים מ- $(4,6)$ .

**11** הגדיר יחס סדר קווי על קבוצה

א)  $N \times N$

ב)  $N \cup (N \times N)$

**12** הוכיחו או הפריכו את טענות הבאות.

א) איחוד של 2 יחסים סדר חלקי הוא סדר חלקי

ב) חיתוך של 2 יחסים סדר חלקי הוא סדר חלקי

ג) יחס הפוך לסדר חלקי הוא סדר חלקי

ד) ענו על השאלות א-ג) עבור יחסים שקילות