

**תרגיל 5 . תמורות, חליפות וצירופים עם חזרות.
בינום של ניוטון וזהויות קומבינטוריות.**

1. מצאו מספר הפתרונות הטבעיים של
 (א) המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 = 7$.
 (ב) המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 = n$ שונים זה מזה שמקיימים את התנאים $x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0$.
 (ג) אי-השוויון $x_1 + x_2 + x_3 < 10$.
2. בכמה אופנים ניתן לחלק 7 תפוזים בין 3 ילדים כך שכל ילד יקבל לפחות תפוז 1.
3. בכמה אופנים ניתן לחלק 7 תפוזים ו-5 שזיפים בין 3 ילדים כך שכל ילד יקבל לפחות תפוז 1.
4. כמה מספרים טבעיים קטנים ממיליון הם בעלי סכום ספרות א) 9 ? ב) 9 לכל היותר?

5. (א) מצאו מקדם של $x^3 y^2 z^2$ ב- $(x + y + z)^7$
 (ב) מצאו מקדם של $x^a y^b$ ב- $(1 + x + y)^n$
 (ג) מצאו מקדם של x^{15} ושל x^{22} ב- $(x + x^5 + x^7)^{10}$

6. חישוב את הסכומים: .

$$\begin{aligned} & \left(\binom{31}{2} + \binom{31}{3} + \binom{31}{4} + \dots + \binom{31}{13} + \binom{31}{14} + \binom{31}{15} \right) \quad (\alpha) \\ & \left(\binom{100}{2} + \binom{100}{4} + \binom{100}{6} + \dots + \binom{100}{94} + \binom{100}{96} + \binom{100}{98} \right) \quad (\beta) \\ & \left(\binom{100}{2} - \binom{100}{3} + \binom{100}{4} - \binom{100}{5} + \dots + \binom{100}{50} - \binom{100}{51} \right) \quad (\gamma) \\ & \left(\binom{200}{2} + \binom{200}{4} + \binom{200}{6} + \dots + \binom{200}{94} + \binom{200}{96} + \binom{200}{98} \right) \quad (\delta) \end{aligned}$$

7. הוכיחו:

$$\begin{aligned} & 3^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot 2^i \quad (\alpha) \\ & \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n} \quad (\beta) \\ & \sum_{k=1}^n k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1} \quad (\gamma) \\ & \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k \cdot \binom{n}{k} = 0 \quad (\delta) \end{aligned}$$

8. השתמשו בשיקול קומבינטורי להוכחת העובדה שהמספרים הבאים שלמים:

א. $\frac{(2n)!}{2^n}$;

ב. $\frac{(3n)!}{2^n \cdot 3^n}$.

9. יהי 20 כדורים לבנים ו-20 כדורים אדומים. יש לחלק כדורים כאלה בין 4 תאים שונים כך שבכל תא יהיו:
א) לפחות 2 כדורים מכל סוג,
ב) לפחות 2 כדורים לבנים בתא הראשון.

10. נתבונן במספרים ≤ 5 ספרתיים (ז"א אפשר לכתוב 0 במקום ראשון). נגיד ש-2 מספרים כאלה שקולים אם כל אחד מהם הוא תמורה של השני. כמה מספרים כאלה לא שקולים אחד לשני.

11. מטיילים 4 קוביות זהות. מהו מספר התוצאות של ההטלה? מהו מספר התוצאות של ההטלה, כך שבהן מופיע המספר 1 לפחות פעם אחד?.

12 א) בכמה דרכים ניתן לסדר בשורה m כדורים לבנים ו- n כדורים שחורים, כך ששני כדורים שחורים לא יהיו סמוכים?

ב) בכמה דרכים ניתן לסדר בשורה m כדורים לבנים ו- n כדורים שחורים, כך שבין כל שני כדורים שחורים יהיו לפחות s כדורים לבנים?

ג) יש 12 ספרים על המדף. בכמה אופנים ניתן לבחור 5 ספרים אם אסור לבחור ספרים סמוכים?

ד) 9 בעלי-חיים שונים עומדים בשורה, בינם שחף ושפן. כמה יש אפשרויות שבין השחף והשפן יהיו בדיוק 4 בעלי-חיים? מה ההסתברות שבין השחף והשפן יהיו בדיוק 4 בעלי-חיים?

13 א) בכמה אופנים ניתן לשים 4 כדורים לבנים ו-3 כדורים שחורים ל-6 תאים?
ב) בכמה אופנים ניתן לשים 10 כדורים זהים ל-6 תאים כך ש-

(1) בכל תא יהיה לפחות כדור אחד?

(2) בכל תא יהיה לא יותר מ-3 כדורים?

(3) יהיה לא יותר מ-2 תאים ריקים?

14. הוכיחו כי לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים שאם $x + \frac{1}{x}$ מספר שלם אז המספר $x^n + \frac{1}{x^n}$ גם שלם לכל

$n \in \mathbb{N}$. אפשר קודם לבדוק מקרים $n=2, n=3, n=4$.

רמז אפשר להשתמש בנוסחת הבינום של ניוטון.

15. בכמה אופנים ניתן לארוז 10 ספרים שונים בשתי קופסאות אם בכל אחת יש מקום ל-6 ספרים? בדקו שני מקרים:

א. אין מבחינים בין הקופסאות;

ב. מבחינים בין הקופסאות.

בהצלחה!