

תרגיל 6 . עקרון ההכלה והדחה. פונקציות יוצרות. רקורסיה.

1. מצאו מספר פתרונות טבעיים של

(א) המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ שונים זה מזה שמקיימים את התנאים $x_1 \leq 4, x_2 \leq 4, x_3 \leq 3$.

(ב) המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 = n$ שונים זה מזה שמקיימות את התנאים $x_1 \leq 4, x_2 \leq 4, x_3 \leq 3$.

(ג) מצאו פונקציה יוצרת עבור מספר פתרונות טבעיות לא-השיוויון $x_1 + x_2 + x_3 < 10$.

2. מצאו המקדם של x^{12} בביטויים הבאים

(א) $(1 + x + x^2 + \dots)^{15}$

(ב) $(x^6 + x^7 + x^8 + \dots)^{15}$

(ג) $(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \dots)^{15}$.

(ד) $\frac{(1+x)^4}{(1-x)^6}$

3. בכמה דרכים ניתן לבחור $3n$ כדורים מתוך כדורים אדומים, לבנים ושחורים כך שאף צבע לא יבחר יותר מ- $2n$ פעמים?

4. כמה יש מספרים בין 1000 ו-2000 (לא כולל קצוות) שלא מתחלקים ב-7,

לא מתחלקים ב-11 ולא מתחלקים ב-13?

5. כמה יש פונקציות "על" מקבוצה בעלת 5 איברים על קבוצה בעלת 3 איברים?

6. יהי a_n מספר פתרונות של המשוואה: $2a + 3b = n$.

(א) מצאו את פונקציה היוצרת של סדרה a_n כאשר $a, b \in \mathbb{N}$ מספרים טבעיים כלשהם

(ב) מצאו את פונקציה היוצרת של סדרה a_n , כאשר $a, b \in \{0, 1\}$

(ג) מצאו את פונקציה היוצרת של סדרה a_n , כאשר $a, b, c \in \mathbb{N}, a \leq \alpha, b \leq \beta$

7. מצאו מספר a_n מילים באורך n (בעלי n אותיות) באלף בית A, B, C, D שלא מכילים תתי

המילים: (א) AB, AC , (ב) AA (ג) AA, AB, AC, AD , (ד) AA, BB .

8. מצאו את נוסחה רקורסיבית ונוסחה מפורשת עבור מספר הדרכים בהן ניתן לרצף

(א) שביל בגודל $n \times 1$ במרצפות בגודל 1×1 לבנות ובמרצפות בגודל 1×2 שחורות, וכחולות.

(ב) מתחם בגודל $n \times 2$ על-ידי משבצות בגדל 2×1 (אפשר להשתמש במשבצות בגדל 2×1 כמשבצות בגדל 1×2).

(ג) מתחם בגודל $n \times 2$ על-ידי משבצות לכחולות וצהובות בגודל 2×1 (אפשר להשתמש במשבצות בגדל 2×1 כמשבצות בגדל 1×2).

9. מצאו את a שזהו מספר הסידורים של 3 כדורים אדומים, 2 כדורים כחולים ו-3 כדורים ירוקים בהם אין 3 כדורים סמוכים באותו צבע.

10. בכמה דרכים ניתן לחלק 8 כדורים לבנים, 10 כדורים אדומים, ו-5 כדורים כחולים ל-4 תאים:

(א) ללא תנאים נוספים?

(ב) כך שבכל תא יהיה לפחות כדור אחד?

11. בכמה דרכים ניתן לסדר 20 ספרים ב-4 מדפים אם ידוע כי בכל מדף יש מקום לכל 20 ספרים:

(א) ללא תנאים נוספים?

(ב) כך שבכל מדף יהיה לפחות ספר אחד?

בהצלחה !