אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
מדור בחינות

תאריך הבחינה : 30.6.15
שם המרצה : ג. משביצקי, ר. ליפיאנסקי
מבחן ב : מבוא למתמטיקה דיסקרטית
מס' קורס : 20119661
שנה : תשע"ה סמ' : אביב מועד : א
משך הבחינה : 3 שעות
חומר עזר : דף נוסחאות מצורף

ענו על 3 מתוך 4 השאלות הבאות. כל שאלה שווה 34 נקודות. הוכיחו ונמקו תשובותיכם.
הניקוד המקסימאלי במבחן הוא 102. מי שיצבור 100 נקודות או יותר ציונו הסופי יהיה 100.

שאלה 1.

(17 נק') **א)** מהו מספר הסידורים של 9 כדורים: 3 כדורים אדומים, 3 כדורים כחולים, ו-3 כדורים ירוקים. מהו מספר הסידורים של כדורים אלו בהם אין 3 כדורים סמוכים באותו צבע.

רמז אפשר להשתמש בשיטת ההכלה וההדחה.

(17 נק') **ב)** מצאו את a_n שזהו מספר הסידורים באורך n של כדורים משלושה צבעים: אדום, כחול, ירוק שלא מכילים זוגות אדום-אדום ואדום-כחול של כדורים סמוכים.

פתרון. א) בו נסמן ע"י $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ את התנאים הבאים: a_1 - בסידור הנ"ל קיימים 3 כדורים אדומים סמוכים., a_2 בסידור הנ"ל קיימים 3 כדורים כחולים סמוכים ו- a_3 בסידור הנ"ל קיימים 3 כדורים ירוקים מוכים. צריך למצא $N(\overline{\alpha}_1\overline{a}_2\overline{a}_3)$. לפי עקרון ההכלה והפרדה נקבל:

$$N(\overline{\alpha}_1\overline{a}_2\overline{a}_3)=N-\sum_{i=1}^{3}N(\alpha_i)+\sum_{i,j=1}^{3}N(\alpha_i\alpha_j)-N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$$

אבל $N(\alpha_1)=N(\alpha_2)=N(\alpha_3)=\dfrac{7!}{3!3!}$ ו- $N(\alpha_1\alpha_2)=N(\alpha_2\alpha_3)=N(\alpha_1\alpha_3)=\dfrac{5!}{3!}$ ו- $N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=3!$

כתוצאה מכך נקבל כי $N(\overline{\alpha}_1\overline{a}_2\overline{a}_3)=\dfrac{9!}{3!3!3!}-3\dfrac{7!}{3!3!}+3\dfrac{5!}{3!}-6$.

ב) יש a_{n-1} סידורים באורך n שמתחילים בכדור ירוק ו- a_{n-1} שמתחילים בכדור כחול ו- a_{n-1} סידורים באורך n שמתחילים בזוג אדום-ירוק ואין סידורים אחרים באורך n שמקיימים את כל התנאים של השאלה. לכן $a_n=2a_{n-1}+a_{n-2}$, $a_1=3$, $a_2=9-2=7$ לכן $a_0=a_2-2a_1=7-6=1$.

הפתרונות של המשוואה x^2-2x-1 הם $1+\sqrt{2}$ ו- $1-\sqrt{2}$ ולכן $a_n=\alpha(1+\sqrt{2})^n+\beta(1-\sqrt{2})^n$

נחשב α,β מהמשוואות $a_0=1=\alpha+\beta$ ו-

$a_1=3=\alpha(1+\sqrt{2})+\beta(1-\sqrt{2})=\alpha+\beta+(\alpha-\beta)\sqrt{2}=1+(\alpha-\beta)\sqrt{2}$ ולכן $(\alpha-\beta)=\sqrt{2}$

לכן $\alpha=(1+\sqrt{2})/2$ ו- $\beta=(1-\sqrt{2})/2$. נקבל תשובה $a_n=(1+\sqrt{2})^{n+1}/2+(1-\sqrt{2})^{n+1}/2$

שאלה 2.

(12 נק') **א)** מצאו את הצורה הדיסיונקטיבית נורמאלית הקנונית עבור הפסוק $(A\to B)\to C$.

(11 נק') **ב)** הוכיחו כי לא קיים פסוק במערכת הקשרים $\{\vee,\ \wedge\}$ השקול לוגית ל- $A\to B$.

(11 נק') **ג)** מצאו צורה דיסיונקטיבית נורמאלית מינימאלית עבור הפסוק
$(Y\wedge\neg Z)\vee(\neg X\wedge\neg Y\wedge Z)\vee(\neg Y\wedge\neg Z)\vee(X\wedge Y\wedge Z)$
<u>רמז</u> אפשר להשתמש במפות קרנו.

פתרון. א) בהוכחה של משפט הצגת של פונקציה אמת הצגנו פונקציית אמת על-ידי פסוק בצורה הדיסיונקטיבית נורמאלית הקנונית. נסמן השמה בשלושה משתנים על-ידי שלישיה לדוגמה השלישיה (T,T,F) מסמנת השמה s הבאה: $s(A)=s(B)=T,\ s(C)=F$.
$Val((A\to B)\to C,s)=T$ אם ורק אם $s(C)=T$ או $Val((A\to B),s)=F$. לכן
$Val((A\to B)\to C,s)=T$ אם ורק אם $s\in\{(T,F,F),(T,T,T),(T,F,T),(F,T,T),(F,F,T)\}$
לכן הצורה הדיסיונקטיבית נורמאלית הקנונית עבור הפסוק $(A\to B)\to C$ היא
$(A\wedge\neg B\wedge\neg C)\vee(A\wedge B\wedge C)\vee(A\wedge\neg B\wedge C)\vee(\neg A\wedge B\wedge C)\vee(\neg A\wedge\neg B\wedge C)$

ב) נוכיח באינדוקציה על אורך הפסוק, שכל פסוק φ הכתוב במערכת $\{\vee,\wedge\}$ מקבל ערך F בהשמה g הנותנת ערך F לכל המשתנים בפסוק.
בסיס האינדוקציה: $\varphi=A$ פסוק אטומי והטענה מתקיימת $Val(\varphi,s)=s(A)=F$.
הנחת האינדוקציה: לכל פסוק φ מאורך קטן מ-n הכתוב במערכת $\{\vee,\wedge\}$ מתקיים $val(\varphi,g)=F$ עבור g ההשמה הנותנת ערך F לכל המשתנים הפסוקיים.
צעד האינדוקציה: יהא φ פסוק מאורך n הכתוב במערכת $\{\vee,\wedge\}$. אז יש 2 מקרים.
1. $\varphi=\psi\vee\lambda$, אז מהנחת האינדוקציה $val(\psi,g)=F=val(\lambda,g)$, ומכאן:
$val(\varphi,g)=t_\vee(val(\psi,g),val(\lambda,g))=t_\vee(F,F)=F$ כנדרש.
2. $\varphi=\psi\wedge\lambda$, אז מהנחת האינדוקציה $val(\psi,g)=F=val(\lambda,g)$, ומכאן:
$val(\varphi,g)=t_\wedge(val(\psi,g),val(\lambda,g))=t_\wedge(F,F)=F$ כנדרש.

מכיוון ש- $val(x\to y,g)=T$ נקבל שאין פסוק שקול ל- $x\to y$ במערכת $\{\vee,\wedge\}$.

<u>שאלה 3.</u>
א) מצאו פסוק בשפה L למבנה המתמטי $M=(A;R,=)$ עם יחס דו-מקומי R על A שמגדיר כי
(3 נק') **א1)** היחס R הוא פונקציה מ-A ל-A;
(9 נק') **א2)** R היא פונקציה **על** ולכל $b\in A$ יש בדיוק 2 מקורות.
כאשר עבור $(a,b)\in R$ איבר a נקרא מקור לאיבר b.

(11 נק') **ב)** תהא L שפה המכילה סימן יחס דו-מקומי R וסימן השוויון.
לכל זוג מהמבנים הבאים מצאו פסוק שנכון באחד מהם ולא נכון בשני.
$M_1=(Q,\le),\ \ M_2=(N,\le),\ \ M_3=(P(N),\subseteq)$.
ג) הוכיחו כי
(6 נק') **ג 1)** קבוצת כל המספרים המתחלקים ב-3 גדירה במבנה $M=(N,+)$.
(5 נק') **ג 2)** קבוצת כל המספרים האי-זוגיים גדירה במבנה $M=(N,\equiv_2,0)$ כאשר $\equiv_2$ מוגדר ע"י $a\equiv_2 b$ אם ורק אם $(a-b)$ מתחלק ב-2 (שקילות מודולו 2).

פתרון.
א1) $\alpha_{func}=(\forall a)(\exists b)((a,b)\in R)\wedge(\forall a)(\forall b)(\forall c)(((a,b)\in R\wedge(a,c)\in R)\to b=c)$
א2) $\alpha_1=(\forall b)(\exists a)((a,b)\in R)$ פונקציה **על** ז"א לכל $b\in A$ יש לפחות מקור אחד.
$\alpha_2=(\forall b)(\exists a)(\exists c)((a,b)\in R\wedge(a,c)\in R)\wedge(\neg(b=c))$ טוען כי לכל $b\in A$ יש לפחות 2 מקורות.
$\alpha_3=(\forall b)(\exists a)(\exists c)(\forall d)((a,b)\in R\wedge(c,b)\in R)\wedge((d,b)\in R\to(d=a\vee d=c))$ טוען כי לכל $b\in A$ יש לא יותר מ-2 מקורות.

אזי הפסוק הוא: $\varphi = \alpha_{func} \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3$

הערה 1. פסוק α_2 גורר לוגית פסוק α_1 לכן פסוק α_1 אפשר לא לכתוב (מיותר).

הערה 2. כל משתנה קשור ניתן להחליף למשתנה שלא מופיע בנוסחה. לדוגמא

$$\alpha_{func} = (\forall a)(\exists b)((a,b) \in R) \wedge (\forall t)(\forall s)(\forall c)(((t,s) \in R \wedge (t,c) \in R) \rightarrow s = c)$$

ב) נתבונן בנוסחות $\varphi_{\min}(x) = (\forall y)((y,x) \in R \rightarrow x = y)$, $\varphi_{\max}(x) = (\forall y)((x,y) \in R \rightarrow x = y)$

נתבונן בפסוקים $\alpha = (\exists b)\varphi_{\min}(b)$, $\beta = (\exists a)\varphi_{\max}(a)$

מבנה M_2 וגם מבנה M_3 מספקים את α אבל M_1 לא מספק את α

מבנה M_3 מספק את β אבל M_2 לא מספק את β

ג1) נוסחה $\phi(x) \equiv (\exists y)(y + y + y = x)$ מגדירה ב- M קבוצת כל המספרים המתחלקים ב-3.

ג2) נוסחה $\phi(x) \equiv \neg(x \equiv_2 0)$ מגדירה ב- M קבוצת כל המספרים האי-זוגיים

<u>שאלה 4.</u>

(17 נק') **א)** תהא $A = Z - \{0\}$ קבוצה המספרים השלמים בלי 0. נגדיר על A יחס S באופן הבא

$aSb \Leftrightarrow (ab > 0 \ \wedge \ \frac{a-b}{4} \in Z)$ עבור כל $a,b \in A$.

(6 נק') א1) הוכיחו כי S יחס שקילות.

(5 נק') א2) מצאו את מחלקת השקילות של S המכילה את המספר -3.

(6 נק') א3) מצאו את מספר האיברים בקבוצת המנה A/S ($A|_S$).

(17 נק') **ב)** בכמה אופנים ניתן לסדר 20 כדורים שחורים ו-7 כדורים לבנים כך שאין כדורים לבנים סמוכים.

פתרון. א2) נניח כי b שקול ל- -3 יחסית היחס שקילות S ז.א., $bS(-3)$. אזי $\frac{b+3}{4} = n \in Z$ ו- $-3b > 0$, ז.א. $b < 0$. אזי נקבל כי $b = -3 + 4n, n = 0, -1, -2, ...$. כתוצאה מכך

$-3/S = \{-3 + 4n : n = 0, -1, -2, ...\}$

.

א3) קבוצת המנה מכילה מחלקות השקילות הבאות:

$$1/S = \{4n+1 : n \in N\}, -1/S = \{-4n-1 : n \in N\}, 2/S = \{4n+2 : n \in N\}, -2/S = \{-4n-2 : n \in N\}$$

$$-4/S = \{-4n : n \in N^+\} \text{ ו- } 4/S = \{4n : n \in N^+\}, 3/S = \{4n+3 : n \in N^+\}, -3/S = \{-4n-3 : n \in N^+\}$$

כאשר $N = \{0,1,2,.....\}$ ו- $N^+ = N \setminus \{0\}$

ב) משום שבכל סידור של הכדורים מהבעיה שלנו אין כדורים לבנים סמוכים אנחנו יכולים לנסח מחדש את הבעיה באופן הבא: צריך למקם 7 כדורים לבנים ב-21 מקומות שנמצאים בין 20 כדורים שחורים (כאן אנחנו לוקחים בחשבון גם מקום בשמאל מהכדור שחור הראשון ובימין מהקדור שחור האחרון). אזי מספר אפשרויות לעשות את זה שווה ל- $\binom{21}{7}$.

בהצלחה !