מבוא למתמטיקה דיסקרטית (דף נוסחאות)

תורת הקבוצות

הכלה: קבוצה B מוכלת בקבוצה A אם כל אחד מאיברי B הוא גם איבר של A : קבוצות A ו-B **שוות** A=B אם"ם $A \subseteq B$ וגם $B \subseteq A$

קבוצת החזקה P(A) של קבוצה A היא $P(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$. אם |A|=N אזי $|P(A)| = 2^N$

קבוצה אוניברסלית U מכילה את כל האיברים "בעולם". **קבוצה משלימה** $\overline{B} = U \setminus B$

תכונות של פעולות בין קבוצות

1. $A \cup B = B \cup A$
2. $A \cap B = B \cap A$
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
5. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
6. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
7. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
8. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

מכפלה קרטזית של קבוצה A בקבוצה B היא $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

יחס : קבוצה R ייקרא יחס על A אם $R \subseteq A \times A$. אם $(a,b) \in R$ אזי נרשום את זה $R(a,b)$ או aRb . אם R יחס על A ו- $B \subset A$ אזי **הצמצום** R_1 של R ל-B הוא $R_1 = R \cap (B \times B)$.

תכונות של יחסים: יחס R על קבוצה A הוא

רפלקסיבי אמ"מ $\forall a \in A,\ R(a,a)$

סימטרי אמ"מ $\forall a,b \in A,\ (R(a,b) \rightarrow R(b,a))$

אנטי סימטרי אמ"מ $\forall a,b \in A,\ ((R(a,b) \wedge R(b,a)) \rightarrow (a = b))$

טרנזיטיבי אמ"מ $\forall a,b,c \in A,\ ((R(a,b) \wedge R(b,c)) \rightarrow R(a,c))$

יחס שקילות R על A הוא בעל את התנאים הבאים **רפלקסיביות, סימטריה, טרנזיטיביות**.

יהי R יחס שקילות על A.

מחלקת השקילות a/R של $a \in A$ ביחס R היא $a/R = \{b \in A \mid R(b,a)\}$

קבוצת המנה A/ R של A ביחס R היא $A/R = \{a/R \mid a \in A\}$

יחס סדר חלקי יחס סדר $\leq$ הוא בעל התכונות: **רפלקסיביות, אנטי סימטריה, טרנזיטיביות**

קבוצה סדורה חלקית <A,R> היא קבוצה A שעליה מוגדר יחס סדר חלקית.

יחס סדר קווי R על A הוא יחס סדר על A המקיים את התנאי $\forall a,b \in A\ (R(a,b) \vee R(b,a))$

נאמר כי $a \in A$ איבר **מינימלי (מכסימלי)** ב-<A,R> אם לא קיים איבר $b \in A$, b≠a כך ש $R(b,a), (R(a,b))$

נאמר כי $a \in A$ איבר **מינימום (מקסימום)** ב-<A,R> אם לכל $b \in A$ מתקיים $R(a,b), (R(b,a))$

אם R יחס סדר חלקי על A ו- $B \subset A$ אזי **יחס הצמצום** R_1 של יחס R ל B הוא גם יחס סדר חלקי על B

פונקציה $f : A \rightarrow B$ היא יחס על קבוצה A ו-B כך שלכל $a \in A$ (מקור) **קיים** **יחיד** $b \in B$ (תמונה) כך ש- $a\ f\ b$. נרשום את זה $f(a) = b$.

הרכבת פונקציות $f : A \rightarrow B$ ו- $g : B \rightarrow C$ היא פונקציה $g \circ f : A \rightarrow B$ כך ש- $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ לכל $a \in A$.

פונקציה $f : A \rightarrow B$ **חד-חד-ערכית** (**חח"ע**) אם לכל תמונה קיים מקור יחיד.

פונקציה $f : A \rightarrow B$ **על** אם לכל אבר ב-B ישנו מקור

פונקציה $f : A \rightarrow B$ **הפיכה** אם ישנה פונקציה $g : B \rightarrow A$ כך ש $\forall b \in B\ (f \circ g)(b) = b$ ו- $\forall a \in A,\ (g \circ f)(a) = a$. פונקציה $g : B \rightarrow A$ נקראת **הפוכה** לפונקציה f

קומבינטוריקה

עקרון הסכום: אם A ,B קבוצות סופיות וזרות אזי $|A \cup B| = |A| + |B|$

עקרון מכפלה: אם A ,B קבוצות סופיות אזי $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

בחירה של k עצמים מתוך n:

	עם חזרות	בלי חזרות
יש חשיבות לסדר	n^k	$(n)_k = P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!} = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$
אין חשיבות לסדר	$D(n,k) = \binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k} = C(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{(n)_k}{k!}$

סידור n עצמים מ-k-סוגים שונים (q_i מכל סוג) בשורה: $\frac{n!}{q_1!\cdot q_2!\cdot\ldots\cdot q_k!}$ $\quad \sum_{i=1}^{k} q_i = n$

סידור k עצמים ב-n תאים; שווה ערך לבחירת k מתוך n ללא סדר ועם חזרות: $D(n,k) = \binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n-1}{n-1}$

הבינום של ניוטון: $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$

מקדמים $\binom{n}{i}$ נקראים **__מקדמים בינומיים__.**

__תכונות של מקדמים בינומיים__

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
2. $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$
3. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$
4. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$
5. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
6. $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = 2^{n-1} n$

__עקרון ההכלה וההפרדה__

תהי הקבוצה A בעלת N איברים (|A|=N). אנחנו רוצים למצוא את המספר האיברים N_0 בקבוצה A שאינם מקיימים אף אחד מהתמונות $\alpha_1 ....\alpha_t$. נסמן $N(\alpha_{i_1} ....\alpha_{i_k})$ מספר איברים מהקבוצה A בעלת את התנאים $\alpha_{i_1} ....\alpha_{i_k}$. אזי $N_0 = N - \sum_{1\le i\le t} N(\alpha_i) + \sum_{1\le i<j\le t} N(\alpha_i\alpha_j) - .... + (-1)^t N(\alpha_1......\alpha_t)$

__העיקרון האינדוקציה הרגילה__ 1. **בסיס**: מראים כי הטענה נכונה עבור ערך התחלתי. למשל $n=1$.
צעד אינדוקציה מניחים כי הטענה נכונה עבור n ומראים שהיא נכונה עבור $n+1$ (ומכאן נכונה עבור כל ערך של n)

__העיקרון האינדוקציה השלמה__ 1. **בסיס**: מראים כי הטענה נכונה עבור ערך התחלתי. למשל $n=1$.
צעד אינדוקציה מניחים כי הטענה נכונה מהערך התחלתי עד n, ו מראים כי הטענה נכונה עבור $n+1$.

__רקורסיה:__ קבוצת האיברים מוגדרת כרקורסיה אם
1. איברים אחדים של הקבוצה מוגדרים בצורהה מפורשת (ערכים תחיליים של רקורסיה)
2. האיברים הנותרים של הקבוצה מוגדרים באמצעות האיברים שקבר הוגדרו.

__פיתרון של יחסי רקורסיה לינארית__: יחס רקורסיה הבאה

$$\varphi(n) = c_1\varphi(n-1) + c_2\varphi(n-2) + ... + c_k\varphi(n-k) \qquad (*)$$

נקרא **__היחס הרקורסיה לינארי הומוגני.__** למציאת **__נוסחה מפורשת__** עבור $\varphi(n)$ פותרים המשוואה האופיינית $\lambda^n - c_1\lambda^{n-1} - .... - c_k\lambda^{n-k} = 0$ של משוואה (*). אם שורשים $\lambda_1,......\lambda_k$ של המשוואה (*) **__שונים__** אזי $\varphi(n) = A_1\lambda_1^{\,n} + ... + A_k\lambda_k^{\,n}$ היא **__נוסחה מפורשת__** עבור $\varphi(n)$. את הקבועים קובעים לפי **__התנאים התחיליים__**
אם לפולינום האופייני של יחס רקורסיה (*) קיימים שורשים מרובים אנו נחפש את הפיתרון של היחס באופן אחר. נתבונן רק במקרא $n=2$. ז.א. עבור היחס הרקורסיה מצורה באה:

$$\varphi(n) = c_1\varphi(n-1) + c_2\varphi(n-2),, \quad c_1, c_2 \in R$$

המשוואה האופיינית של היחס הנ"ל היא $\lambda^2 - c_1\lambda^1 - c_2 = 0$. אם **שורשים** λ_1, λ_2 של המשוואה הזו **ממשיים ושווים** אזי $\varphi(n) = A_1\lambda_1^{\ n} + A_2 n\lambda_2^{\ n}$ הוא פתרון של היחס הרקורסיה שלנו. התנאים התחיליים נותנים לנו ערכים של A_2, A_1

פונקציה יוצרת פונקציה היוצרת של הסדרה $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ היא טור הפורמאלי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. הפונקציה היוצרת של הסדרה $1,1,..,1,..$ היא $\varphi(x) = 1 + x + x^2 ... + x^n + ... = \frac{1}{1-x}$. נתבונן בסדרה סופית $1,1,...,1$ המכילה רק n יחידות (ז. א. האיברים הנותרים הם אפסים) אזי הפונקציה היוצרת של סידרה הנ"ל היא

$$g(x) = 1 + x + x^2 ... + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

כדי למצוא את המספר הפתרונות במספרים שלמים של משוואה

$$t_1 + t_2 + ... + t_n = k \qquad (**)$$

שמקיימים את הגבולות $0 \le t_i \le b_i$ $(1 \le i \le n)$, יש לחשב את המקדם של x^k בפולינום

$$\varphi(x) = (1 + x + ... + x^{b_1})...(1 + x + ... + x^{b_n})$$

כאן $\varphi(x)$ היא פונקציה היוצרת של הסדרה $a_0, a_1,.., a_k,..$, כאשר a_k הוא מספר הפתרונות (במספרים שלמים של משוואה הנייל) המקיים את הגבולות הנתונות. אם אנו רוצים למצוא את המספר הפתרונות של משוואה (**) בקבוצה N_0 בלי שום גבולות נוספות על נעלמים אנו נרשום את הפונקציה היוצרת $\psi(x) = (1 + x + x^2 + ...)^n$ ונחפש את המקדם של x^k ב- $\psi(x)$. למעשה הוא שווה ל- $D(n,k) = \binom{n+k-1}{k}$.

נוסחה: $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^n}$

לוגיקה מתמטית

תחשיב הפסוקים פסוק הוא כל משפט שהוא אמיתי או שקרי אך לא שניהם.

טבלת האמת לקשרים הבסיסיים

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$	$\neg p$
1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	0	1	1	1

השמה g לנוסחה לוגית Φ בתחשיב הפסוקים היינה פונקציה שתחומה קבוצת המשתנים בנוסחה וטווחה $\{0,1\}$. ערך האמת של נוסחה Φ בהשמה g יסומן $Val(\Phi, g)$.

נוסחה Φ יקרא **טאוטולוגיה** אם לכל השמה g ל- Φ מתקיים $Val(\Phi, g) = 1$. נוסחה Φ יקרא ***פסוק שקרי*** (או *סתירה*) אם לכל השמה g ל- Φ מתקיים $Val(\Phi, g) = 0$. נאמר כי נוסחאות (פסוקים) Φ ו- Ψ **שקולות לוגית** אם הנוסחה $\Psi \leftrightarrow \Phi$ היינו טאוטולוגיה (סימון: $\Psi \Leftrightarrow \Phi$). פסוק Φ **גורר לוגית** את Ψ אם הפסוק $\Phi \to \Psi$ היינו טאוטולוגיה (סימון: $\Phi \Rightarrow \Psi$). קבוצת פסוקים $\Lambda = \{A_1,..., A_n\}$ גוררת לוגית את Ψ אם הפסוק $(A_1 \wedge ... \wedge A_n) \to \Psi$ היינו טאוטולוגיה (סימון: $\Lambda \Rightarrow \Psi$).

השקילויות הלוגיות הבסיסיים (כאן A, B, C הן נוסחאות איזשהן בתחשיב הפסוקים)

1. $\neg\neg A \Leftrightarrow A$ **2.** $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ **3.** $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ **4.** $A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$

5. $A \wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$ **6.** $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ **7.** $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$ **8.** $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

9. $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$ **10.** $(A \vee B) \wedge C \Leftrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ **11.** $A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

12. $(A \wedge B) \vee C \Leftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$ **13.** $A \vee B \Leftrightarrow \neg A \to B$ **14.** $A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$

15. $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$.

צורה דיסקונקטיבית נורמלית (צ.ד.נ.) של נוסחה

תהי Φ נוסחה במשתנים $p_1,\dots p_n$. קוניונקציה של p_i או שלילותיהם נקראת **קוניונקציה אלמנטארית**. נוסחה Ψ נקראת **צ.ד.נ** של נוסחה Φ אם היא שקולה ל- Φ ו- Ψ היא דיסיונקציה של קוניונקציות אלמנטאריות בנויה מהמשתנים $p_1,\dots p_n$.

אלגוריתם מצאת צ.ד.נ של נוסחה Φ.

1. מהטבלת האמת של הנוסחה Φ בוחרים את השורות בהן בעמודה האחרונה עמדות יחידות.
2. נרכיב הקוניונקציות האלמנטאריות שמתאימות לשורות האלה באופן הבא:

אם בשורה שנבחרה משתנה p_i מקבל ערך האמת 1 אזי בקוניונקציה אלמנטארית משתתף p_i אחרת- $\neg p_i$.

3. נרשום את הדיסיונקציה של הקוניונקציות האלמנטאריות שבנינו בשלב 2. נסמן הנוסחה זו ע"י Ψ. אזי Ψ היא **צורה דיסיונקטיבית נורמלית** של Φ.

שלמות הקשרים מערכת קשרים Ω נקראת **שלמה** אם כל נוסחאות בתחשיב הפסוקים ניתן לרשום בעזרת רק הקשרים מ- Ω.
המערכות הקשרים $\{\wedge,\neg\}$, $\{\neg,\vee\}$, $\{\neg,\to\}$ הן שלמות. את זה נובע מהשקילויות הבאות:

עבור המערכת $\{\neg,\wedge\}$:

1. $A\vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A\wedge\neg B)$ **.2** $A\to B\Leftrightarrow \neg(A\wedge\neg B)$ **.3** $A\leftrightarrow B\Leftrightarrow \neg(A\wedge\neg B)\wedge\neg(B\wedge\neg A)$

עבור המערכת: $\{\neg,\vee\}$

1. $A\wedge B\Leftrightarrow\neg(\neg A\vee\neg B)$ **.2** $A\to B\Leftrightarrow\neg A\vee B$ **.3** $A\leftrightarrow B\Leftrightarrow\neg(\neg(\neg A\vee B)\vee\neg(\neg B\vee A))$

עבור המערכת $\{\neg,\to\}$

1. $A\wedge B\Leftrightarrow\neg\,(A\to\neg B)$ **.2** $A\vee B\Leftrightarrow\neg A\to B$ **.3** $A\leftrightarrow B\Leftrightarrow\neg((A\to B)\to\neg(B\to A))$

תחשיב הפרדיקטים **פרדיקט n-מקומי** φ על קבוצה M הוא פונקציה $\varphi: M^n\to\{0,1\}$.

מבנה $M=\langle M,f\rangle$ של נוסחה Φ בתחשיב הפרדיקטים הוא מערכת של קבוצה לא ריקה M והתאמה f. ההתאמה f היא שיטה להענקת משמעות קונקרטית לסימונים בנוסחה.

השמה g של נוסחה Φ במבנה $M=\langle M,f\rangle$ זאת הפונקציה שתחומה קבוצת המשתנים החופשיים ב- Φ וטווחה M

נסמן ע"י $Val_M(\Phi,g)$ ערך האמת של Φ בהשמה g.

תהיו Φ ו- Ψ נוסחאות בעלות אותה קבוצה של משתנים החופשיים.

נוסחאות Φ ו- Ψ **שקולות במבנה** $M=\langle M,f\rangle$ אם $Val_M(\Psi,g)=Val_M(\Phi,g)$ לכל השמה g על קבוצת משתנים החופשיים.

נוסחאות Φ ו- Ψ **שקולות בקבוצה** M אם הן שקולות בכל מבנה על קבוצה M.

נוסחאות Φ ו- Ψ **שקולות לוגית** (יסומן ע"י $\Phi\Leftrightarrow\Psi$) אם הן שקולות בכל קבוצה.

השקילויות הלוגיות הבסיסיים בתחשיב הפרדיקטים

$\neg((\exists y)U(x,y))\Leftrightarrow(\forall y)\neg U(x,y)$	$\neg((\forall x)U(x,y))\Leftrightarrow(\exists x)\neg U(x,y)$
$(\exists x)(P(x)\vee Q(x))\Leftrightarrow(\exists x)P(x)\vee(\exists x)Q(x)$	$(\forall x)(P(x)\wedge Q(x))\Leftrightarrow(\forall x)P(x)\wedge(\forall x)Q(x)$
$(\exists x)(\exists y)U(x,y)\Leftrightarrow(\exists y)(\exists x)U(x,y)$	$(\forall x)(\forall y)U(x,y)\Leftrightarrow(\forall y)(\forall x)U(x,y)$
$(\exists x)(\exists y)U(x,y)\Leftrightarrow(\exists y)(\exists x)U(x,y)$	$(\forall x)(\forall y)U(x,y)\Leftrightarrow(\forall y)(\forall x)U(x,y)$

נסים לב שבנוסחאות מהשורה שנייה אי אפשר להחליף דיסיונקציה בקוניונקציה והפוך. אף על פי כן מתקיימות את הנוסחאות הבאות

$(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))\Rightarrow(\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x)$	$(\forall x)P(x)\vee(\forall x)Q(x)\Rightarrow(\forall x)(P(x)\vee Q(x))$
$(\exists y)(\forall x)U(x,y)\Rightarrow(\forall x)(\exists y)U(x,y)$	$(\exists x)(\forall y)U(x,y)\Rightarrow(\forall y)(\exists x)U(x,y)$

אם נוסחה B לא מכילה את המשתנה x אזי מתקיימות את השקילויות הבאות:

$(\exists x)P(x)\wedge B\Leftrightarrow(\exists x)(P(x)\wedge B)$	$(\forall x)P(x)\vee B\Leftrightarrow(\forall x)(P(x)\vee B)$

<u>הצורה הפרנקסית נורמלית</u> G של נוסחה A זאת הנוסחה ששקולה ל-A ובה כל כמטים עומדים לפני הנוסחה ובחלק הפנימי של A משתתפים רק סימני פרדיקטים (פעולות) או שלילותיהם.

<u>מפות קרנו</u>

מפת קרנו המתאימה לנוסחה לוגית $E(x,y)$ מוצגת כאן:

הערה:
xy = x and y
x+y = x or y
x’ = not x

הערה:	**הערה:**	**הערה:**
x		
x'		

מפת קרנו המתאימה לנוסחה לוגית $E(x,y,z)$ מוצגת כאן:

	yz	yz'	y'z’	y'z
x				
x'				

מפת קרנו המתאימה לנוסחה לוגית $E(x,y,z,t)$ מוצגת כאן:

	zt	zt'	z't’	z't
xy				
xy'				
x'y’				
x'y				