תרגיל 2 . יחס שקילות. יחס סדר חלקי.

1) יהא R יחס על הקבוצה $P(\mathrm{N})$. בכל אחד מהיחסים הבאים
I) בדקו האם R יחס שקילות
II) מצאו את המחלקת שקילות של $A=\{2,5,14\}$ ביחס R .

ראשית נשים לב שלכל שלוש קבוצות A,B,C מתקיים:
$$A\Delta C = A\Delta(B\Delta \mathrm{B})\Delta C = (A\Delta B)\Delta(B\Delta C)$$

זה יעזור לנו בהמשך.

א) ARB מתקיים אם ורק אם $1\notin A\Delta B$.

נבדוק רפלקסיביות, סימטריות וטרנזיטיביות:

<u>רפלקסיבי:</u>

תהא $A\in P(\mathbb{N})$. צ"ל: ARA, כלומר צ"ל: $1\notin A\Delta \mathrm{A}$.

מתקיים $A\Delta A=\emptyset$, ולכן $1\notin A\Delta \mathrm{A}$.

<u>סימטרי:</u>

יהיו $A,B\in P(\mathbb{N})$ כך ש- ARB. צ"ל: BRA, כלומר צ"ל: $1\notin B\Delta A$.

ARB אומר ש- $1\notin A\Delta B$. כיוון ש- $A\Delta B=B\Delta A$, הרי ש- $1\notin B\Delta A$.

<u>טרנזיטיבי:</u>

יהיו $A,B,C\in P(\mathbb{N})$ כך ש- ARB וגם BRC. צ"ל: ARC, כלומר צ"ל: $1\notin A\Delta C$.

ARB אומר ש- $1\notin A\Delta B$, ו-BRC אומר ש-$1\notin B\Delta C$.

לכן: $1\notin (A\Delta B)\Delta(B\Delta C)$, ולפי טענת העזר, $1\notin (A\Delta C)$.

לכן היחס הוא יחס שקילות.

מחלקת השקילות של הקבוצה $\{2,5,14\}$:

$$\{2,5,14\}/R=\left\{B\in P(\mathbb{N})\middle|BR\{2,5,14\}\right\}=\left\{B\in P(\mathbb{N})\middle|1\notin B\Delta\{2,5,14\}\right\}$$
$$=\{B\in P(\mathbb{N})|1\notin B\}\ since\ 1\notin\{2,5,14\}$$

ב) ARB מתקיים אם ורק אם $A\Delta B$ קבוצה סופית.

נבדוק רפלקסיביות, סימטריות וטרנזיטיביות:

<u>רפלקסיבי:</u>

תהא $A \in P(\mathbb{N})$. צ"ל: ARA, כלומר צ"ל: $A\Delta A$ היא קבוצה סופית.

מתקיים $A\Delta A = \emptyset$, ולכן $A\Delta A$ אכן קבוצה סופית.

<u>סימטרי:</u>

יהיו $A, B \in P(\mathbb{N})$ כך ש- ARB. צ"ל: BRA, כלומר צ"ל: $B\Delta A$ קבוצה סופית.

ARB אומר ש- $A\Delta B$ קבוצה סופית. כיוון ש- $A\Delta B = B\Delta A$, הרי שגם $B\Delta A$ קבוצה סופית.

<u>טרנזיטיבי:</u>

יהיו $A, B, C \in P(\mathbb{N})$ כך ש- ARB וגם BRC. צ"ל: ARC, כלומר צ"ל: $A\Delta C$ קבוצה סופית.

ARB אומר ש- $A\Delta B$ קבוצה סופית, ו-BRC אומר ש-$B\Delta C$ קבוצה סופית.

לכן: $(A\Delta B)\Delta(B\Delta C)$ קבוצה סופית, ולפי טענת העזר, גם $A\Delta C$ חייבת להיות קבוצה סופית.

לכן היחס הוא יחס שקילות.

מחלקת השקילות של הקבוצה $\{2,5,14\}$:

$$\{2,5,14\}/R = \left\{B \in P(\mathbb{N}) \middle| BR\{2,5,14\}\right\} = \left\{B \in P(\mathbb{N}) \middle| B\Delta\{2,5,14\} \text{קבוצה סופית}\right\}$$
$$= \left\{B \in P(\mathbb{N}) \middle| B \text{ סופית}\right\}$$

ג) ARB מתקיים אם ורק אם $A\Delta B$ קבוצה אין סופית.

ד) ARB מתקיים אם ורק אם $A\Delta B$ מוכלת בקבוצת המספרים הראשוניים.

2) תהי A קבוצה ותהי $X \subseteq P(A)$. נגדיר יחס R על $P(A)$ באופן הבא:

לכל $B,C \in P(A)$ מתקיים BRC אם ורק אם $B\Delta C \in X$. הוכיח כי

א) R יחס סימטרי.

<u>הוכחה</u>: יהיו $B,C \in P(\mathbb{N})$ כך ש- BRC. צ"ל: CRB, כלומר צ"ל: $C\Delta B \in X$.

BRC אומר ש-$B\Delta C \in X$. כיוון ש-$B\Delta C = C\Delta B$ הרי שגם $C\Delta B \in X$.

ב) R רפלקסיבי אם ורק אם $\emptyset \in X$.

כוון ראשון: נניח כי R רפלקסיבי, ונוכיח ש-$\emptyset \in X$:

R רפלקסיבי ולכן לכל $B \in P(\mathbb{N})$ מתקיים BRB, כלומר לכל $B \in P(\mathbb{N})$ מתקיים $B\Delta B \in X$.

אבל $B\Delta B = \emptyset$ ולכן $\emptyset \in X$.

כוון שני: נניח כי $\emptyset \in X$ ונוכיח ש-R רפלקסיבי.

תהא $B \in P(\mathbb{N})$. צ"ל: BRB, כלומר צ"ל: $B\Delta B \in X$.

$B\Delta B = \emptyset$ ולכן $B\Delta B \in X$.

ג) R טרנזיטיבי אם ורק אם X סגורה תחת Δ .

3) מצא דוגמה של יחס דו-מקומי על קבוצה I) N, II) ישרים, קטעים ונקודות, III) אנשים

א) רפלקסיבי, סימטרי אבל לא טרנזיטיבי

דוגמא ליחס R על $\mathbb{N}$: נבחר איבר כלשהו של $\mathbb{N}$ למשל 100, ונגדיר שתי קבוצות:

$$A = \{0,1,2, \dots ,100\}$$

$$B = \{100,101,102, \dots\}$$

נגדיר $R = (A \times A) \cup (B \times B)$.

R רפלקסיבי:

לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $n \in A$ או $n \in B$, ולכן $(n,n) \in A \times A$ או $(n,n) \in B \times B$ ומכאן ש-$(n,n) \in R$.

R סימטרי:

נניח nRk עבור $n,k \in \mathbb{N}$ ונראה ש-kRn.

nRk אומר ש-$(n,k) \in A \times A$ או $(n,k) \in B \times B$, ולכן $n,k \in A$ או $n,k \in B$.

בכל מקרה מתקיים ששניהם באותה הקבוצה, ולכן גם $(k,n) \in A \times A$ או $(k,n) \in B \times B$.

כלומר $(k,n) \in (A \times A) \cup (B \times B)$ ולכן kRn.

R לא טרנזיטיבי:

דוגמא נגדית: $5R100$ וגם $100R101$, אבל $(5,101) \notin R$ כי הם לא באותה הקבוצה.

דוגמא ליחס על קבוצת הישרים, הקטעים והנקודות (נסמנה ב-M):

לכל $a,b \in M$ נגדיר aRb אם ורק אם ל-a ול-b יש לפחות נקודה אחת משותפת.

דוגמא ליחס על קבוצת כל האנשים בעולם:

לכל שני אנשים a,b בעולם, נגדיר aRb אם ורק אם a מכיר אישית את b.

ב) רפלקסיבי, טרנזיטיבי אבל לא סימטרי ולא אנטי-סימטרי

דוגמא ליחס R על $\mathbb{N}$:

$$R = \{(n,n) | n \in \mathbb{N}\} \cup \{(1,2),(2,1),(1,3),(2,3)\}$$

דוגמא ליחס על הקבוצה M:

נקבע נקודה p במישור.

לכל $a,b \in M$ נגדיר aRb אם ורק אם $a=b$ או (a ו-b נקודות והמרחק בין a ו-p קטן או שווה מהמרחק בין b ו-p).

דוגמא ליחס על קבוצת כל האנשים בעולם:

לכל שני אנשים a,b בעולם, נגדיר aRb אם ורק אם המשקל של a קטן או שווה למשקל של b.

ג) שקילות וגם סדר חלקי

צריך למצוא יחס שהוא רפלקסיבי, סימטרי, אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי.

לכן מקבלים שהיחס הדרוש הוא יחס הזהות.

$$R = \{(n,n) | n \in A\} = Id_A$$

ד) סימטרי, טרנזיטיבי אבל לא רפלקסיבי

דוגמא ליחס R על $\mathbb{N}$:

$$R = \{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2)\}$$

דוגמא ליחס על הקבוצה M:

נקבע שתי נקודות $p,q \in M$ ונגדיר:

$$R = \{(p,p),(q,q),(p,q),(q,p)\}$$

דוגמא ליחס על קבוצת כל האנשים בעולם:

נבחר שני אנשים p,q ונגדיר:

$$R = \{(p,p),(q,q),(p,q),(q,p)\}$$

4) א) נגדיר יחס שקילות S על קבוצת המספרים הטבעיים N באופן הבא:

לכל *a* ו- *b* ב- N , $(a,b) \in S$ אם ורק אם יש ל-*a* ול- *b* אותם מחלקים הראשוניים וגם בפירוק של- $a>1$ ושל- $b>1$ יש אותו מספר של הגורמים הראשוניים. למשל, $(12,18) \in S$ אבל $(12,36) \notin S$ (ל- 12 ול- 36 יש אותם מחלקים הראשוניים 2 ו- 3 אבל ל12 יש 3 גורמים ראשוניים ול36 יש 4 גורמים ראשוניים). נסמן ב $D(m)$ קבוצת כל המחלקים הטבעיים של m.

א) מצאו קבוצת מנה $D(100)/_S$ של $D(100)$ לפי יחס S .

$$D(100)/S = \left\{ \begin{matrix} \{1\}/S\,,\{2\}/S\,,\{3\}/S\,,\{4\}/S\,,\{5\}/S\,, \\ \{25\}/S\,,\{10\}/S\,,\{20{,}50\}/S\,,\{100\}/S \end{matrix} \right\}$$

ב) מצאו דוגמאות של m כך ש- ב$D(m)$ בכל מחלקת שקילות לפי יחס S יש איבר אחד בלבד.

$m = 1$ כי $D(1) = \{1\}$ ואז יש מחלקת שקילות אחת בלבד, ובה המספר 1.עבור כל $m \neq 1$, מחלקות השקילות של m ושל 1 שונות זו מזו.

כל אחת ממחלקות השקילות ב$D(m)$ של מספרים m מהצורה p_1^n או $p_1 \cdot \ldots \cdot p_s$ או $p_1 \cdot \ldots \cdot p_s \cdot q^n$ כך ש- $p_1, \ldots, p_s, q$ הם מספרים ראשוניים שונים זה מזה, מכילה בדיוק איבר אחד.

ג) מצאו כל מחלקות שקילות ב- N לפי יחס S שמכילות בדיוק איבר אחד.

כל אחת ממחלקות השקילות של מספרים מהצורה p_1^n או $p_1 \cdot \ldots \cdot p_s$ כך ש-$p_1, \ldots, p_s$ הם מספרים ראשוניים שונים זה מזה, מכילה בדיוק איבר אחד.

5) לכל אחד מהיחסים הבאים I) הוכח כי הוא יחס סדר חלקי,
II) בדוק אם הוא יחס סדר קווי,
III) מצא את קבוצה של איברים מקסימליים ואת קבוצה של איברים מינימליים.

א) יחס $\leq$ על N .
יחס סדר קווי על $\mathbb{N}$.
מינימלי: 0, מקסימלי: אין.

ב) יחס $\subseteq$ על $P(\mathrm{N})$.
יחס סדר חלקי אבל לא קווי. יש אינסוף זוגות של קבוצות שאינן ניתנות להשוואה. למשל, שני יחידונים שונים זה מזה, כיוון שאף אחד מהם אינו מוכל בשני.
מינימלי: הקבוצה הריקה (מוכלת בכל קבוצה). מקסימלי: $\mathbb{N}$ (מכילה את כל תתי-הקבוצות שלה).

ג) יחס $|$ על N המוגדר על-ידי $a \mid b \Leftrightarrow (\exists c \in N)(ac = b)$ ז"א a מחלק את b.
יחס סדר חלקי אבל לא קווי. יש אינסוף מספרים שאינם ניתנים להשוואה. למשל, כל זוג מספרים ראשוניים – אף אחד מהם לא מחלק את האחר.
מינימלי: 1 (אין אף מספר טבעי שמחלק את 1 פרט לעצמו). מקסימלי: 0 (0 לא מחלק אף מספר טבעי).

ד) יחס $|$ על $\mathrm{N} \setminus \{0,1\}$ המוגדר על-ידי $a \mid b \Leftrightarrow (\exists c \in N)(ac = b)$ ז"א a מחלק את b.
יחס סדר חלקי אבל לא קווי. יש אינסוף מספרים שאינם ניתנים להשוואה. למשל, כל זוג מספרים ראשוניים – אף אחד מהם לא מחלק את האחר.
מינימלי: כל המספרים הראשוניים. הסבר: אם p הוא ראשוני ומתקיים $d|p$ בהכרח $d = 1$ או $d = p$. כיוון שהקבוצה היא $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, בהכרח $d = p$. כלומר, אם p הוא ראשוני, המספר היחיד שמחלק אותו בקבוצה הנ"ל זה הוא עצמו.
מקסימלי: אין. כיוון ש-0 לא בקבוצה, עבור כל $a \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ מתקיים $a|a^2$. ולכן כל $a \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ אינו איבר מקסימלי.

6) נגדיר יחס S על קבוצת המספרים הטבעיים N באופן הבא:

לכל *a* ו- *b* ב- N , $(a,b) \in S$ אם ורק אם יש ל- a ול- b אותם מחלקים הראשוניים וגם a מחלק את b. למשל, $(6,18) \in S$ אבל $(9,36) \notin S$.

א) הוכיחו ש- S הוא יחס סדר חלקי על N . בדקו האם S הוא יחס סדר קווי.

נסמן ב-$C(m)$ את קבוצת כל המחלקים הראשוניים של m.

למשל: $C(100) = \{2,5\}$, $C(1) = \emptyset$, $C(0) = P$ כאשר P היא קבוצת כל המספרים הראשוניים.

S רפלקסיבי על $\mathbb{N}$:

לכל $a \in \mathbb{N}$, מתקיים $C(a) = C(a)$ וכן ש-$a|a$, ולכן aSa.

S אנטי-סימטרי:

יהיו $a, b \in \mathbb{N}$ שונים זה מזה כך ש-aSb. נראה שבהכרח $(b, a) \notin S$.

aSb ולכן $a|b$. כיוון ש-a, b שונים זה מזה, בהכרח מתקיים ש-$a < b$. לכן לא יתכן ש-$b|a$, ולכן $(b, a) \notin S$.

S טרנזיטיבי:

יהיו $a, b, c \in \mathbb{N}$ כך ש-aSb וגם bSc. נראה שבהכרח מתקיים גם aSc.

aSb ולכן $C(a) = C(b)$ וגם $a|b$. נסמן $b = na$ עבור $n \in \mathbb{N}$.

bSc ולכן $C(b) = C(c)$ וגם $b|c$. נסמן $c = mb$ עבור $m \in \mathbb{N}$.

אזי $C(a) = C(b) = C(c)$ וכן $c = mb = mna$. כיוון ש-$mn \in \mathbb{N}$ הרי ש- $a|c$.

לכן קיבלנו aSc.

ב) מצאו כל איברים מינימאליים בקבוצה N עם יחס S

האיברים המינימליים: $0,1, p_1, \dots, p_s, \dots$, $p_1 \dots p_k$ כך ש-$p_1, \dots, p_s, \dots, p_k, \dots$ הם מספרים ראשוניים שונים זה מזה.

ג) מצאו כל איברים מכסימליים בקבוצה N עם יחס S .

האיברים המקסימליים: 0,1.

7) א) מצאו את כל יחסי שקילות R בקבוצה $\{1,2,3,4,5\}$ שמקיימות תנאים הבאים: $(1,2);(3,4)\in R$. (אפשר להגדיר R דרך חלוקה).

נסמן: $A=\{1,2,3,4,5\}$ ו- $S=\{(1,2),(2,1),(3,4),(4,3)\}$.

אזי יחסי השקילות בעלי התכונה המבוקשת הם:

כאשר 1,2 לא שקולים ל-3,4:

$$R_1=Id_A\cup S$$
$$R_2=R_1\cup\{(1,5),(5,1),(2,5),(5,2)\}$$
$$R_3=R_1\cup\{(3,5),(5,3),(4,5),(5,4)\}$$

כאשר 1,2 שקולים ל-3,4:

$$R_4=R_1\cup\{(1,3),(3,1),(1,4),(4,1),(2,3),(3,2),(2,4),(4,2)\}$$
$$R_5=A\times A$$

ב) מצאו את כל יחסי סדר חלקי בקבוצה $\{1,2,3,4,5\}$ שמקימות תנאים הבאים: 1 הוא איבר מינימום , ו-5, 3, 4 הם איברים מקסימאליים (אפשר לשרטט בצורה גראפית).

נסמן: $S=\{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5)\}$.

1 חייב להימצא מתחת לכולם (כי הוא מינימום) ואסור שיהיה משהו מעל 3,4,5 כי הם מקסימליים. נשאר לקבוע את מקומו של 2 ביחס לשאר. הוא חייב להיות מעל 1 ומתחת לתת קבוצה כלשהי של $\{3,4,5\}$. לכן יש $2^3=8$ אופציות למקם את 2, כלומר סה"כ ישנם 8 יחסי שקילות העונים על הדרישות:

$$R_1=Id_A\cup S$$
$$R_2=R_1\cup\{(2,3)\}$$
$$R_3=R_1\cup\{(2,4)\}$$
$$R_4=R_1\cup\{(2,5)\}$$
$$R_5=R_1\cup\{(2,3),(2,4)\}$$
$$R_6=R_1\cup\{(2,3),(2,5)\}$$
$$R_7=R_1\cup\{(2,4),(2,5)\}$$
$$R_8=R_1\cup\{(2,3),(2,4),(2,5)\}$$

8) הוכיחו כי P הוא יחס סדר חלקי על קבוצה A אם ורק אם
$P^2 \subseteq P, P \cap P^{-1} = Id_A, Id_A \subseteq P$

<u>כוון 1</u>: נניח כי P הוא יחס סדר חלקי, ונראה את שלוש הדרישות.

P יחס סדר חלקי ולכן רפלקסיבי, ומכאן ש-$Id_A \subseteq P$.

$(x,y) \in P \cap P^{-1}$ אם ורק אם $(x,y) \in P$ וגם $(x,y) \in P^{-1}$, כלומר אם ורק אם $(x,y) \in P$ וגם $(y,x) \in P$. מהאנטיסימטריות של P נקבל ש- $x = y$, ולכן $P \cap P^{-1} = Id_A$.

יהי $(x,y) \in P^2$. נראה ש- $(x,y) \in P$.

$$P^2 = P \circ P = \{(x,y) | \exists z\ s.t. (x,z) \in P\ and\ (z,y) \in P\}$$

$(x,y) \in P^2$ ולכן קיים z כך ש- $(x,z) \in P$ וגם $(z,y) \in P$.

כיוון ש-z טרנזיטיבי נובע ש- $(x,y) \in P$.

<u>כוון 2</u>: נניח כי מתקיימות שלוש הדרישות ונראה כי P הוא יחס סדר חלקי.

$Id_A \subseteq P$ ולכן P רפלקסיבי.

כפי שראינו בכיוון הראשון, מהעובדה ש- $P \cap P^{-1} = Id_A$ נובע ש-P אנטיסימטרי.

נניח ש-$P \ni (a,b)$ וגם $(b,c) \in P$. נראה שגם $(a,c) \in P$.

$(a,b) \in P$ וגם $(b,c) \in P$, ולכן $(a,c) \in P \circ P = P^2$, לפי הגדרת ההרכבה.

כיוון ש- $P^2 \subseteq P$, הרי שגם $(a,c) \in P$.

9) יחס דו-מקומי T על קבוצה $\{2,3,4,12\}\times\{2,3,12\}$ מוגדר על-ידי $((x,y),(z,t))\in T$ אם ורק אם z מתחלק ב x ו t מתחלק ב y (חילוק רגיל ב-N). בדקו כי T יחס סדר חלקי. סרטטו גרף של יחס סדר חלקי T בקבוצה הנתונה. מצאו איברים מקסימאליים, מינימליים, מקסימום ומינימום אם קיים.

נסמן: $A=\{2,3,4,12\}\times\{2,3,12\}$. אזי:

$$A=\{(2,2),(2,3),(2,12),(3,2),(3,3),(3,12),(4,2),(4,3),(4,12),\\(12,2),(12,3),(12,12)\}$$

T רפלקסיבי:

יהי $(a,b)\in A$. צ"ל: $(a,b)T(a,b)$.

ברור כי $a|a$ וכן $b|b$, ולכן $(a,b)T(a,b)$.

T אנטיסימטרי:

נניח כי $(a,b)T(c,d)$ וגם $(c,d)T(a,b)$. נראה שבהכרח $(a,b)=(c,d)$.

$(a,b)T(c,d)$ ולכן $a|c$ וגם $b|d$.

$(c,d)T(a,b)$ ולכן $c|a$ וגם $d|b$.

קיבלנו ש- $a|c$ וגם $c|a$ בטבעיים, ולכן בהכרח $a=c$.

כמו כן קיבלנו ש- $b|d$ וגם $d|b$ בטבעיים, ולכן בהכרח $b=d$.

כלומר $(a,b)=(c,d)$ כפי שרצינו.

T טרנזיטיבי:

נניח כי $(a,b)T(c,d)$ וגם $(c,d)T(e,f)$. נראה שבהכרח $(a,b)T(e,f)$.

$(a,b)T(c,d)$ ולכן $a|c$ וגם $b|d$. נסמן $c=na$ ו-$d=mb$.

$(c,d)T(e,f)$ ולכן $c|e$ וגם $d|f$. נסמן $e=lc$ ו-$f=kd$.

נקבל: $e=lc=lna$ ו-$f=kd=kmb$ ולכן $a|e$ וגם $b|f$.

מכאן ש-$(a,b)T(e,f)$ כפי שרצינו.

מקסימום ומקסימלי יחיד: $(12,12)$

מינימום: אין

מינימליים: $(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)$

10) יחס דו-מקומי T על קבוצת זוגות של מספרים טבעיים שונים מ-1 כלומר על $\boldsymbol{A} = (\mathbb{N} \setminus \{\mathbf{1}\}) \times (\mathbb{N} \setminus \{\mathbf{1}\})$ מוגדר על-ידי $((x,y),(z,t)) \in T$ אם ורק אם $\boldsymbol{x \neq z}$ וגם z מתחלק ב x או $x = z$ ו t מתחלק ב y. אם $((x,y),(z,t)) \in T$ אז אומרים כי (x,y) תחת (z,t) או (z,t) מעל (x,y)

א1) בדקו כי T הוא יחס סדר חלקי

רפלקסיבי על A:

יהי $(a,b) \in A$. צ"ל: $(a,b)T(a,b)$.

מתקיים $a = a$ וכן $b|b$ ולכן $(a,b)T(a,b)$.

אנטיסימטרי:

נניח $(a,b)T(c,d)$ וגם $(c,d)T(a,b)$. נראה שבהכרח $(a,b) = (c,d)$.

$(a,b)T(c,d)$ וגם $(c,d)T(a,b)$, ולכן לא יתכן שהתנאי הראשון מתקיים, כי אז נקבל ש-$a \neq c$ ובכל זאת כל אחד מהם מחלק את השני. לכן בהכרח מתקיים התנאי השני של היחס ולכן $a = c$, ובנוסף $b|d$ וגם $d|b$. לכן בהכרח גם $b = d$, וקיבלנו ש- $(a,b) = (c,d)$.

טרנזיטיבי:

נניח $(a,b)T(c,d)$ וגם $(c,d)T(e,f)$. נראה שבהכרח $(a,b)T(e,f)$.

מקרה 1: $a = c$ וגם $d = nb$, $c = e$ וגם $f = md$

אזי מקבלים $a = c = e$ וגם $f = md = mnb$ ולכן $(a,b)T(e,f)$ לפי התנאי השני.

מקרה 2: $a = c$ וגם $d = nb$, וגם $c \neq e$ וגם $e = mc$

אזי מקבלים $a = c \neq e$ וגם $e = mc = ma$ ולכן $(a,b)T(e,f)$ לפי התנאי הראשון.

מקרה 3: $a \neq c$ וגם $c = na$, $c = e$ וגם $f = md$

אזי מקבלים $a \neq c = e$ וגם $e = c = na$ ולכן $(a,b)T(e,f)$ לפי התנאי הראשון.

מקרה 4: $a \neq c$ וגם $c = na$, $c \neq e$ וגם $e = mc$

כלומר $a < c$ וגם $c < e$ ולכן $a \neq e$.

קיבלנו $a \neq e$ וגם $e = mc = mna$ ולכן $(a,b)T(e,f)$ לפי התנאי הראשון.

א2) מצאו כל איברים מינימליים ב T הקטנים מ-$(4,6)$ וכל איברים מכסימליים ב T.

א3) סרטטו קבוצה סדורה חלקית של כל איברים הקטנים מ-$(4,6)$.

11) הגדיר יחס סדר קווי על קבוצה

א) $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$

הסדר המילוני (הלקסיקוגרפי):

לכל $(a,b),(c,d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ נגדיר $(a,b)R(c,d)$ אם ורק אם $a < c$ או $a = c$ וגם $b \leq d$.

ב) $\mathrm{N} \cup (\mathrm{N} \times \mathrm{N})$

ניקח את היחס מסעיף א' ונציב בהתחלה את איברי $\mathbb{N}$.

כלומר נגדיר יחס R באופן הבא:

לכל $x,y \in \mathbb{N} \cup (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ מתקיים xRy אם ורק אם:

1. $x,y \in \mathbb{N}$ וגם $x \leq y$
2. $x \in \mathbb{N}$ וגם $y \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
3. $x,y \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (כלומר x,y שניהם זוגות סדורים) ומתקיים הסדר המילוני מסעיף א'.

12) הוכיחו או הפריכו את טענות הבאות.

א) איחוד של 2 יחסים סדר חלקי הוא סדר חלקי

לא נכון. <u>דוגמא נגדית</u>: נגדיר:

$$R = \{(1,1), (2,2), (1,2)\}$$

$$S = \{(1,1), (2,2), (2,1)\}$$

אזי R, S הם יחסי סדר חלקיים על הקבוצה $A = \{1,2\}$, אבל האיחוד שלהם הוא לא יחס סדר חלקי על A כי הוא לא אנטיסימטרי:

$$R \cup S = \{(1,1), (2,2), (1,2), (2,1)\}$$

ב) חיתוך של 2 יחסים סדר חלקי הוא סדר חלקי

נכון. <u>הוכחה</u>:

נניח R, S הם יחסי סדר חלקיים על קבוצה A.

נראה כי $R \cap S$ גם הוא יחס סדר חלקי על A.

רפלקסיבי:

יהי $a \in A$. צ"ל: $aR \cap Sa$.

R, S רפלקסיביים ולכן $(a,a) \in R$ וגם $(a,a) \in S$. לכן $(a,a) \in R \cap S$.

אנטיסימטרי:

יהיו $a, b \in A$ כך ש-$(a,b) \in R \cap S$ וגם $(b,a) \in R \cap S$. נראה שבהכרח $a = b$.

$(a,b) \in R \cap S$ אומר ש- $(a,b) \in R$ וגם $(a,b) \in S$.

$(b,a) \in R \cap S$ אומר ש- $(b,a) \in R$ וגם $(b,a) \in S$.

קיבלנו $(a,b) \in R$ וגם $(b,a) \in R$ ולכן $a = b$ מהאנטיסימטריות של היחס R.

טרנזיטיבי:

יהיו $a, b, c \in A$ כך ש-$(a,b) \in R \cap S$ וגם $(b,c) \in R \cap S$. נראה ש- $(a,c) \in R \cap S$.

$(a,b) \in R \cap S$ ולכן $(a,b) \in R$ וגם $(a,b) \in S$.

$(b,c) \in R \cap S$ ולכן $(b,c) \in R$ וגם $(b,c) \in S$.

קיבלנו $(a,b), (b,c) \in R$ ולכן $(a,c) \in R$ מהטרנזיטיביות של R.

קיבלנו $(a,b), (b,c) \in S$ ולכן $(a,c) \in S$ מהטרנזיטיביות של S.

אזי $(a,c) \in R \cap S$ כפי שרצינו.

ג) יחס הפוך לסדר חלקי הוא סדר חלקי

ד) ענו על השאלות א)-ג) עבור יחסים שקילות