אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
מדור בחינות

תאריך הבחינה: 7.2.16
שם המרצה: ג. משביצקי, ר. ליפיאנסקי
מבחן ב: מבוא למתמטיקה דיסקרטית
מסי קורס: 20119661
שנה: תשע״ו סמ׳: א מועד: א
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: דף נוסחאות מצורף

ענו על 3 השאלות בדיוק מ-4 השאלות הבאות. כל שאלה שווה 34 נקודות. הוכיחו ונמקו תשובותיכם.
הניקוד המקסימאלי במבחן הוא 102. מי שיצבור 100 נקודות או יותר ציונו הסופי יהיה 100.
קבוצת N של המספרים הטבעיים מכילה את 0 .

<u>שאלה 1</u>.
(12 נק') **א)** בכמה אופנים ניתן לחלק 6 תפוחים ו-4 תפוזים בין 3 ילדים כך שכל אחד מקבל לפחות תפוח אחד ואף אחד לא מקבל 4 תפוזים.
(11 נק') **ב)** כמה יש פתרונות טבעיים לאי-השיוויון $x_1+x_2+x_3<10$ שמקיימים את התנאים $x_1\le 4, x_2\le 4, x_3\le 4$.

(11 נק') **ג)** מצאו את a_n שזהו מספר הדרכים בהן ניתן לרצף מתחם בגודל $2\times n$ על-ידי משבצות לבנות בגודל 1×1 ומשבצות צהובות ושחורות בגודל 1×2 (אפשר להשתמש במשבצות בגודל 2×1 כמשבצות בגודל 1×2).

פתרון. א) בואו נסמן ע"י $x_i, i=1,2,3$ מספר תפוחים שמקבל ילד ה- i. אז נקבל את המשוואה

$$x_1+x_2+x_3=6,\ x_i\ge 1,\ i=1,2,3$$

בואו נסמן ע"י $z_i=x_i-1, i=1,2,3$. אז נגיע למשוואה:

$$z_1+z_2+z_3=3,\ z_i\ge 0,\ i=1,2,3$$

למציאת מספר פתרונות של המשוואה הנ"ל בטבעיים נבנה את הפונקציה יוצרת $f(x)$:

$$f(x)=(1+x+x^2+\dots)^3=\left(\frac{1}{1-x}\right)^3$$

המקדם של x^3 ב-$f(x)$ שווה ל- $\binom{5}{3}=10$.

בואו נסמן ע"י $y_i, i=1,2,3$ מספר תפוזים שמקבל ילד ה-i. אז נגיע למשוואה:

$$y_1+y_2+y_3=4,\ y_i<4,\ i=1,2,3 .$$

למציאת מספר פתרונות של המשוואה הנ"ל בטבעיים נבנה את הפונקציה יוצרת $g(x)$:

$$g(y)=(1+y+y^2+y^3)^3=\left(\frac{1-y^4}{1-y}\right)^3=(1-3y^4+3y^8-y^{12})\left(\frac{1}{1-y}\right)^3=$$

$$=(1-3y^4+3y^8-y^{12})\sum_k\binom{2+k}{k}y^k$$

המקדם של y^4 ב- $g(x)$ שווה ל- $\binom{6}{2}-3=12$. לפי עקרון הכפל התשובה לבעיה שלנו היא $10\times12=120$.

פתרון. ב) בואו נתבונן במשוואה

$$x_1+x_2+x_3+x_4=10 \quad (*)$$

כאשר $x_1\le4, x_2\le4, x_3\le4, x_4>0$. קל לראות כי קיימת ההתקה על וחח"ע בין קבוצת פתרונות בטבעיים של אי-שוויון מכורי ובין קבוצת פתרונות בטבעיים של המשוואה $(*)$. בואו נרכיב פונקציה יוצרת $\varphi(x)$ למציאת מספר פתרונות של המשוואה $(*)$ בטבעיים:

$$\varphi(x)=(1+x+x^2+x^4)^3\cdot(x+x+x^2+...)=\left(\frac{1-x^5}{1-x}\right)^3\frac{x}{1-x}=(1-x^5)^3x\left(\frac{1}{1-x}\right)^4=$$

$$(x-3x^6+3x^{11}-x^{16})\sum_k\binom{3+k}{k}x^k$$

אזי מספר פתרונות של המשוואה $(*)$ בטבעיים שווה למקדם של x^{10} ב- $\varphi(x)$. המקדם הזה שווה ל- $\binom{12}{3}-3\binom{7}{3}=115$.

פתרון. ג).נסמן עיי' a_n מספר אפשרויות לרצף מתחם בגודל $n\times2$ על-ידי משבצות מהבעיה שלנו. נקבל שעבור a_n מתקיים יחס רקורסיה: $a_n=3a_{n-1}+8a_{n-2}$ כאשר $a_1=3, a_2=17$ (ריצוף שמתקבלת ע"י הזזה של מרצפת בגודל 1×2 ביחס של מרצפת אחרת בגודל 1×2 במשבצת בגודל 1×1 אנחנו לא לוקחים בחשבון). אזי $a_2=3a_1+8a_0$.

מכאן נובע כי $a_0=1$. משוואה אופיינית עבור היחס רקורסיה הקודמת היא $\lambda^2-3\lambda-8=0$.

משום שהשורשים $\lambda_1=\frac{3+\sqrt{41}}{2}$ ו- $\lambda_2=\frac{3-\sqrt{41}}{2}$ שונים וממשיים נקבל כי פתרון הכללי של היחס שלנו הוא $a_n=C_1\left(\frac{3+\sqrt{41}}{2}\right)^n+C_2\left(\frac{3-\sqrt{41}}{2}\right)^n$ כאשר $a_1=3, a_0=1$. למציאת C_1 ו- C_2 נקבל מערכת משוואות לינאריות:

$$\begin{cases} a_0=1=C_1+C_2 \\ a_1=3=C_1\frac{3+\sqrt{41}}{2}+C_2\frac{3-\sqrt{41}}{2} \end{cases}$$

אזי $C_1=\frac{3+\sqrt{41}}{2\sqrt{41}}$ ו- $C_2=\frac{-3+\sqrt{41}}{2\sqrt{41}}$. פתרון של היחס רקורסיה שלנו הוא

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{41}}\left(\left(\frac{3+\sqrt{41}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{3-\sqrt{41}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

שאלה 2.

(12 נק') **א)** מצאו כל X כפסוקים במשתנים A,B כך ש- $(B\to X)\Leftrightarrow((B\vee A)\to(A\vee C))$.

(11 נק') **ב)** הוכיחו כי לא קיים פסוק במערכת הקשרים $\{\vee,\ \wedge\}$ השקול לוגית ל- $A\leftrightarrow B$.

(11 נק') **ג)** מצאו צורה דיסיונקטיבית נורמאלית מינימאלית עבור הפסוק
$(Y\wedge Z)\vee(X\wedge\neg Y\wedge\neg Z)\vee(\neg Y\wedge Z)\vee(\neg X\wedge Y\wedge\neg Z)$

<u>רמז:</u> אפשר להשתמש במפות קרנו.

פתרון. א) מצאו את כל הפסוקים X במשתנים A,B,C כך ש- $(B\to X)\Leftrightarrow((B\vee A)\to(A\vee C))$

נבנה טבלת אמת:

A	B	C	$B\vee A$	$A\vee C$	$(B\vee A)\to(A\vee C)$	$B\to X$	X
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	T	T/F
T	F	F	T	T	T	T	T/F
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	F	T	T	T	T/F
F	F	F	F	F	T	T	T/F

בכל אחת מהשורות 3,4,7,8 X יכול לקבל T/F ולכן ישנן $2^4=16$ אפשרויות עבור X.

להלן שתי דוגמאות עבור X:

$(A\wedge B\wedge C)\vee(A\wedge B\wedge\neg C)\vee(\neg A\wedge B\wedge C)$

$(A\wedge B\wedge C)\vee(A\wedge B\wedge\neg C)\vee(\neg A\wedge B\wedge C)\vee(A\wedge\neg B\wedge C)$

ב) הוכיחו כי לא קיים פסוק במערכת הקשרים $\{\wedge,\vee\}$ השקול לוגית ל- $A\leftrightarrow B$.

נעזר בטבלת אמת:

A	B	$A\vee B$	$A\wedge B$	$A\leftrightarrow B$
T	T	T	T	T
T	F	T	F	F
F	T	T	F	F
F	F	F	F	T

נשים לב כי בהשמה שבה גם A וגם B מקבלים ערך F, מתקיים שגם $A\wedge B$ וגם $A\vee B$ מקבלים ערך F. לעומת זאת, באותה השמה מתקיים שדווקא $A\leftrightarrow B$ מקבל ערך T.

לכן ננסח את הטענה הבאה:

<u>טענה</u>: נניח φ פסוק במערכת $\{\wedge,\vee\}$, אז עבור השמה g שנותנת F לכל המשתנים הפסוקיים מתקיים $Val(\varphi,g)=F$.

ההוכחה היא באינדוקציה על אורך הפסוק:

- אם $\varphi=p$ משתנה פסוקי, אז $g(p)=F$, ולכן $Val(\varphi,g)=F$.
- יהי φ פסוק במערכת $\{\wedge,\vee\}$ שאורכו גדול מ-1, ונניח שהטענה נכונה לכל פסוק שאורכו קטן מאורכו של φ.
- נראה שהטענה נכונה גם עבור φ עצמו.

  φ פסוק במערכת $\{\wedge,\vee\}$, ולכן $\varphi=\alpha\vee\beta$ או $\varphi=\alpha\wedge\beta$, כאשר α,β הם בעצמם פסוקים במערכת $\{\wedge,\vee\}$.

  תהי g השמה שנותנת ערך F לכל המשתנים הפסוקיים בפסוק φ.

  - אם $\varphi=\alpha\vee\beta$, אז $|\alpha|,|\beta|<|\varphi|$ ו- α,β הם פסוקים במערכת $\{\wedge,\vee\}$. לכן לפי הנחת האינדוקציה מתקיים: $Val(\alpha,g)=F$ וגם $Val(\beta,g)=F$.

לכן גם $Val(\alpha \vee \beta, g) = F$, כלומר $Val(\varphi, g) = F$.

- אם $\varphi = \alpha \wedge \beta$, אז $|\alpha|,|\beta| < |\varphi|$ ו- α, β הם פסוקים במערכת $\{\wedge,\vee\}$. לכן לפי הנחת האינדוקציה מתקיים: $Val(\alpha, g) = F$ וגם $Val(\beta, g) = F$. לכן גם $Val(\alpha \wedge \beta, g) = F$, כלומר $Val(\varphi, g) = F$.

לכן הטענה נכונה עבור φ, ולכן היא נכונה לכל פסוק במערכת $\{\wedge,\vee\}$.

יהי φ פסוק במערכת $\{\wedge,\vee\}$, ותהי g השמה שנותנת ערך **F** לכל המשתנים הפסוקיים.

g נותנת ערך F לכל המשתנים הפסוקיים, בפרט: $g(A) = g(B) = F$. לכן $Val(A \leftrightarrow B, g) = T$.
מצד שני, לפי הטענה מתקיים $Val(\varphi, g) = F$, ולכן $\varphi \not\Leftrightarrow A \leftrightarrow B$.

א. מצאו צורה דיסיונקטיבית נורמלית מינימלית עבור הפסוק
$$(Y \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (\neg Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg Z)$$

נעזר במפת קרנו:

	$Y \wedge Z$	$Y \wedge \neg Z$	$\neg Y \wedge \neg Z$	$\neg Y \wedge Z$
X	1		1	1
$\neg X$	1	1		1

לכן הצורה הדיסיונקטיבית הנורמלית המינימלית היא:
$$Z \vee (\neg Y \wedge X) \vee (\neg X \wedge Y)$$

<u>שאלה 3.</u>

א) מצאו פסוק בשפה L למבנה מתמטי $M = (|M|; R, =)$ עם יחס דו-מקומי R שמגדיר כי
(3 נק') **א1)** R הוא יחס סדר חלקי.
(9 נק') **א2)** בקבוצה סדורה חלקית $M = (|M|; R, =)$ יש בדיוק 2 איברים מקסימליים, איבר מינימום ואם להוריד את איבר המינימום הזה מהקבוצה אז יש איבר מינימום בקבוצת איברים נשארים.
(11 נק') **ב)** תהא L שפה המכילה סימן יחס דו-מקומי R וסימן של שיוויון.
לכל זוג מהמבנים הבאים מצאו פסוק שנכון באחד מהם ולא נכון בשני.
$M_1 = (Z, =),\ \ M_2 = (Z, \equiv_2),\ \ M_3 = (Z, Q)$, כאשר $(x, y) \in Q \Leftrightarrow x^2 = y^2$

ג) הוכיחו כי
(3 נק') **ג 1)** קבוצה ריקה $\varnothing$ גדירה במבנה $M = (P(N); \subseteq)$.
(4 נק') **ג 2)** היחס דו-מקומי $\subseteq$ גדיר במבנה $M = (P(N); \cap)$.
(4 נק') **ג 3)** היחס תלת-מקומי $D = D(x, y, z)$ גדיר במבנה $M = (P(N); \subseteq)$ כאשר
$(x, y, z) \in D \Leftrightarrow x \cap y = z$

פתרון. א1) פסוק
$\varphi_1 \equiv (\forall x)(xRx) \wedge (\forall x)(\forall y)(xRy \wedge yRx \to x = y) \wedge (\forall a)(\forall b)(\forall c)(aRb \wedge bRc \to aRc)$ מגדיר כי
R הוא יחס סדר חלקי.

א2) איבר מקסימלי מוגדר על-ידי $\alpha_{\max}(x) \equiv (\forall y)(xRy \to y = x)$.
איבר מינימום מוגדר על-ידי $\alpha_{\min}(x) \equiv (\forall y)(xRy)$.
פסוק $\varphi_2 \equiv (\exists a)(\exists b)(\alpha_{\max}(a) \wedge \alpha_{\max}(b) \wedge \neg(a = b)) \wedge (\forall c)(\alpha_{\max}(c) \to (c = a \vee c = b))$
מגדיר כי יש בדיוק 2 איברים מקסימליים.

פסוק $\varphi_3 \equiv (\exists a)(\exists b)(\alpha_{\min}(a) \wedge (\forall c)(\neg(c=a) \to bRc)$ מגדיר כי יש איבר מינימום ואם להוריד את איבר המינימום הזה מהקבוצה אז יש איבר מינימום בקבוצת איברים נשארים.
לכן $\varphi \equiv \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$ הוא פסוק הנדרש.

ב) היחסים בכל אחד ממבנים M_1, M_2, M_3 הם יחסים שקילות. יחס $=$ הוא יחס שקילות יחיד שהוא גם אנטי סימטרי (וגם יחס סדר חלקי) ולכן אפשר להשתמש בפסוק φ_1 מסעיף א1). אבל פסוק הבא עוד יותר פשוט - $\psi_1 \equiv (\forall a)(\forall b)(aRb \to a=b)$ פסוק ψ_1 נכון ב-M_1 ולא נכון ב-M_2 ולא נכון ב-M_3.
כדי להבדיל בין M_2 ו-M_3 אפשר להשתמש לדוגמא בעובדה שב-M_2 יש רק 2 מחלקות שקילות וב-M_3 יש אין סוף מחלקות שקילות ולכן הפסוק $\psi_2 \equiv (\exists a)(\exists b)(\exists c)(\neg aRb \wedge \neg aRc \wedge \neg cRb)$ נכון ב-M_3 ולא נכון ב-M_2.

ג1) קבוצה ריקה $\varnothing$ מוגדרת על-ידי $\varphi_{\varnothing}(x) \equiv (\forall y)(x \subseteq y)$ כי רק $\varnothing$ מוכלת בכל קבוצה.
ג 2) היחס דו-מקומי $\subseteq$ מוגדר על-ידי $\varphi_{\subseteq}(x,y) \equiv (x \cap y = x)$ לפי הגדרה של $\cap$ ושל $\subseteq$.
ג 3) היחס תלת-מקומי $D = D(x,y,z)$ מוגדר על-ידי
$\varphi_D(x,y,z) \equiv (z \subseteq x \wedge z \subseteq y \wedge (\forall u)(u \subseteq x \wedge u \subseteq y \to u \subseteq z))$ מפני ש-$x \cap y = z$ אם ורק אם z קבוצה הכי גדולה בין כל תתי קבוצות משותפות של x ושל y.

שאלה 4.

(12 נק') **א)** כמה יש פתרונות טבעיים למערכת משוואות:
$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=10 \\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=15 \end{cases}$$

ב) יהא $M=(Z;F,=)$ מבנה מתמטי כאשר Z קבוצת מספרים השלמים, $F(x)=2x$ הוכיחו כי
(5 נק') **ב1)** 0 גדיר במבנה $M=(Z;\ F,=)$.
(6 נק') **ב2)** היחס דו-מקומי $\equiv_2$ גדיר במבנה $M=(Z;\ F,=)$
(תזכורת $a \equiv_2 b$ אם שני המספרים a,b זוגיים או שניהם אי-זוגיים)

(11 נק') **ג)** הוכיחו כי גרף עם 20 קדקודים שמקיים תנאי הבא: $\min_{v\in G}\deg(v) \geq 10$
(ז"א לכל קדקוד יש לפחות 10 שכנים לא כולל קדקוד עצמו) הוא בהכרח קשיר.

פתרון. א) בואו נעבור למערכת (*) שהיא שקולה למערכת מכורית
$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=10 \\ x_5+x_6=5 \end{cases} \quad (*)$$
למציאת מספר פתרונות בטבעיים של המשוואה הראשונה של מערכת נבנה את הפונקציה יוצרת $f(x)$:
$$f(x)=(1+x+x^2+\ldots)^4=\left(\frac{1}{1-x}\right)^4$$
המקדם של x^{10} ב-$f(x)$ שווה ל-$\binom{13}{3}=286$.
למציאת מספר פתרונות בטבעיים של המשוואה השנייה של המערכת נבנה את הפונקציה יוצרת $g(x)$:
$$g(x)=(1+x+x^2+\ldots)^2=\left(\frac{1}{1-x}\right)^2$$

המקדם של x^5 ב- $g(x)$ שווה ל- $6 = \binom{6}{1}$. לפי עקרון הכפל התשובה לבעיה שלנו היא $286 \times 6 = 1716$.

ב) יהא $M = (\mathbb{Z}; F, =)$ מבנה מתמטי כאשר $\mathbb{Z}$ קבוצת המספרים השלמים ו-$F(x) = 2x$. הוכיחו:

ב.1. 0 גדיר במבנה M

$x = 0$ הוא היחיד שעבורו מתקיים $F(x) = x$. לכן נרשום את הנוסחה:

$$\varphi_0(y) = (F(y) = y)$$

ב.2. היחס הדו-מקומי $\equiv_2$ גדיר במבנה M, כאשר $a \equiv_2 b$ אם שני המספרים a, b זוגיים או שניהם אי-זוגיים

נרצה לרשום נוסחה שתחזיר T רק כאשר שני האיברים שמציבים בה הם שקולים מודולו 2.
לכן נרשום נוסחה בשני משתנים שאומרת ששניהם זוגיים או שניהם אי-זוגיים:

$$\varphi_{\equiv_2}(x, y) = \left(\varphi_{\text{זוגי}}(x) \wedge \varphi_{\text{זוגי}}(y)\right) \vee \left(\varphi_{\text{אי-זוגי}}(x) \wedge \varphi_{\text{אי-זוגי}}(y)\right)$$

כאשר:

$$\varphi_{\text{זוגי}}(x) = \exists z (F(z) = x)$$

$$\varphi_{\text{אי-זוגי}}(x) = \neg \exists z (F(z) = x)$$

ג) גרף $\Gamma = (V, E)$ נקרא קשיר אם קיים מסלול $a, c_1, \ldots, c_k, b$ בין כל 2 קדקודים $a, b \in V$ ז"א $ac_1, c_1c_2, \ldots, c_kb \in E$.

<u>שיטה 1.</u> נתבונן בקדקודים $a, b \in V$. אם a, b שכנים אז קיים מסלול ביניהם. נתבונן בקבוצה A של 10 שכנים של a, ובקבוצה B של 10 שכנים של b. אם $A \cap B = \varnothing$ אז בשני קבוצות האלה ביחד עם a, b יש 22 קדקודים. בגרף הנתון יש רק 20 קדקודים לכן קיים $c \in A \cap B$ ולכן קיים מסלול a, c, b בין קדקודים $a, b \in V$.

<u>שיטה 2.</u> נניח בשלילה שגרף הזה לא קשיר. לכן קיימים מחלקות קשירות ואם $a, b \in V$ שייכים למחלקות קשירות שונים זה מזה אז $ab \notin E$. במחלקת קשירות הכי קטנה A יש לא יותר מ-10 קדקודים ואם $a \in A$ אז לא יותר מ-9 שכנים שייכים ל-A ולכן לפחות אחד מ-10 שכנים שייך למחלקת קשירות שונה מ-A. קיבלנו סתירה להנחה ולכן גרף $\Gamma = (V, E)$ קשיר.

בהצלחה !