

אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
מדור בחינות



תאריך הבחינה: 1.05.14
שם המרצה: ג. משביצקי, ס. סמית

בוחר ב: מתמטיקה בדידה

מס' קורס: 20119661
סמ': מועד:
משך הבחינה: 2 שעות
חומר עזר: אין

כל שאלה שווה 50 נק. נמקו את שלבי החישוב. נסמן ב- N קבוצה של מספרים טבעיים.

- (1 א) נתבונן במשוואות $A - X = B$, כאשר $A, B \in P(N)$ פרמטרים הנתונים ו- X משתנה.
(10 נק') (1 א) עבור אילו ערכים של הפרמטרים A, B למשוואה הנתונה קיים פתרון.
(10 נק') (2 א) עבור אילו ערכים של הפרמטרים A, B למשוואה הנתונה קיים פתרון יחיד.

(10 נק') (ב) מצאו את מספר היחסים הדו-מקומיים הרפלקסיביים השונים זה מזה בקבוצה של n איברים.

- (ג) הוכיחו או הפריכו על-ידי דוגמה נגדית. לכל $A, B, X \in P(N)$ מתקיים:
(10 נק') (ג 1) אם $A \cap X = B \cap X$ אז בהכרח $A = B$,
(10 נק') (ג 2) למשוואה $A \Delta X = B$ בהכרח קיים פתרון Δ מסמן הפרש סימטרי, ו- X משתנה).

שאלה 2:

נתונה מילה W (כלומר סידרה לא ריקה של אותיות) באלפבית $X = \{a, b, c\}$. סידרה (לא ריקה) של אותיות עוקבות ב- W נקראת תת מילה (לדוגמה עבור המילה $W = abcbbb$, $U = bcbb$ היא תת מילה של W אבל $V = ac$ היא לא תת מילה של W). נסמן ב- $S(W)$ את קבוצת כל תתי המילים של W . האורך של מילה הוא מספר האותיות במילה (לדוגמה אורך המילה $U = bcbb$ שווה 4 ואורך המילה $V = ac$ שווה 2).

- (א) נגדיר יחס שקילות \equiv על $S(W)$ באופן הבא: עבור $U, V \in S(W)$, $U \equiv V$ אם U ב- V ו- V מופיעות בדיוק אותן אותיות (לדוגמה עבור המילה $W = abcbbb$, $bc \equiv cb$ אבל $bc \not\equiv cb$).
(10 נק') (א 1) נניח $W = acbac$, מצאו את קבוצת המנה $S(W) / \equiv$.
(10 נק') (א 2) מצאו את כל המילים W כך שעבור יחס שקילות \equiv יש בדיוק 3 מחלקות שקילות.

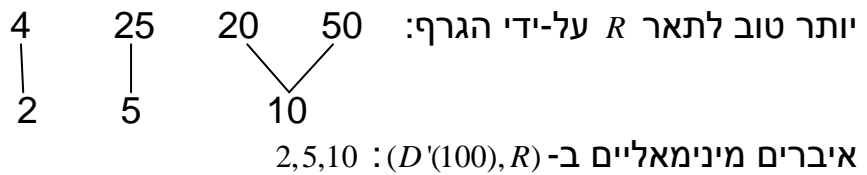
15 נק' (ב) על הקבוצה $D'(100) = D(100) - \{1, 100\}$ של כל המחלקים של 100 חוץ מ-1, 100 מגדירים יחס סדר חלקי R כך ש- $(a, b) \in R$ אם ורק אם a מחלק b וגם a -ל- b יש אותם מחלקים ראשוניים. (דוגמא: נגדיר יחס S דומה ל- R על $D'(36)$ אז $(2, 4) \in S$ אבל $(2, 12) \notin S$). מצאו את כל האיברים המקסימאליים ואת כל האיברים המינימאליים ב- $(D'(100), R)$.

15 נק' (ג) תהי A קבוצה של כל המספרים הטבעיים הדו-ספרתיים שמתחלקים ב-8 ולא מתחלקים ב-16 תהי B קבוצה של כל המספרים הטבעיים הקטנים מ-300 וגדולים מ-202 שמתחלקים ב-16. מצאו את מספר הפונקציות ההפיכות מ- A ל- B .

פתרון. א1) $S(acbac) \equiv \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{ac\}, \{cb\}, \{ba\}, \{acb, cba, bac, acba, cbac, acbac\}\}$

2א) $W = x^{a_1} y^{b_1} x^{a_2} y^{b_2} \dots x^{a_k} y^{b_k}$ כאשר x, y אותיות $x \neq y, a_i \geq 0, b_i \geq 0$ וקיימים $a_s \neq 0, b_t \neq 0$ אז יש 3 מחלקות שקילות: מחלקת שקילות שמכילה חזקות של x , מחלקות שקילות שמכילה חזקות של y ומחלקות שקילות שמכילה כל תת מילים אחרים.

ב) $R = \{(2, 2), (2, 4), (4, 4), (5, 5), (5, 25), (25, 25), (10, 10), (10, 20), (20, 20), (10, 50), (50, 50)\}$



איברים מקסימאליים ב- $(D'(100), R)$: 4, 25, 20, 50

ג) נסמן ב- $[x/k]$ מספר טבעי הכי קרוב ל- x/k ולא יותר מ- x/k , ז"א $0 \leq (x/k - [x/k]) < 1$. נסמן ב- $|D|$ מספר איברים בקבוצה D . אם D היא הקבוצה של המספרים הטבעיים חיוביים שמתחלקים ב- k וקטנים מ- x או שווים ל- x אז $|D| = [x/k]$. לכן $|B| = [300/16] - [203/16] = 18 - 12 = 6$ ו- $|A| = ([100/8] - [10/8]) - [100/16] = (12 - 1) - 6 = 5$. אפשר גם לחשב $|A|, |B|$ בדרך אחרת. מספר איברים ב- B גדול ממספר איברים ב- A לכן לא קיימת פונקציה מ- A על B ולא קיימת פונקציה חח"ע מ- B ל- A . פונקציה מ- A ל- B הפיכה אם ורק אם היא חח"ע ו-על. לכן מספר הפונקציות ההפיכות מ- A ל- B שווה ל-0.

