<u>שאלה 1:</u> **א)** על הקבוצות A,B,C ידוע כי $A\cup C=B\cup C$ וגם $A\cap C=B\cap C$.
(17 נק') הוכיחו כי $A\subseteq B$.
(17 נק') **ב)** הוכיחו או הפריכו: $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$

<u>פתרון</u> א) יהי $x\in A$. צ"ל: $x\in B$.
$x\in A$ ולכן $x\in A\cup C$. מהנתון ש- $A\cup C=B\cup C$ נסיק גם ש- $x\in B\cup C$.
אזי מתקיים $x\in B$ או $x\in C$.
אם $x\in B$, אז סיימנו.
אם $x\in C$, אזי מתקיים $x\in A$ וגם $x\in C$, ולכן $x\in A\cap C$. מהנתון ש- $A\cap C=B\cap C$, נסיק גם ש- $x\in B\cap C$, ולכן $x\in B$ וגם $x\in C$. בפרט, $x\in B$, כפי שרצינו.
כלומר בכל מקרה מתקיים ש- $x\in B$, ולכן $A\subseteq B$. ■
<u>פתרון נוסף:</u>
מתקיים: $A=\left((A\cup C)\setminus C\right)\cup(A\cap C)$ וכן $B=\left((B\cup C)\setminus C\right)\cup(B\cap C)$.
כיוון ש- $A\cup C=B\cup C$ וגם $A\cap C=B\cap C$, נקבל ש- $A=B$. ■

ב) הטענה <u>אינה</u> נכונה. נפריך ע"י דוגמא נגדית:
נגדיר למשל $A=\{1\},B=\{2\}$.
אזי $A\cup B=\{1,2\}$, ולכן $P(A\cup B)=P(\{1,2\})=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$.
אבל $P(A)\cup P(B)=P(\{1\})\cup P(\{2\})=\{\emptyset,\{1\}\}\cup\{\emptyset,\{2\}\}=\{\emptyset,\{1\},\{2\}\}$
ולכן $P(A\cup B)\neq P(A)\cup P(B)$.

<u>שאלה 2:</u> יהא $f:N\to N$ פונקציה. נגדיר יחס דו-מקומי R_f על N על-ידי התנאי $(a,b)\in R_f$ אם ורק אם $f(a)=f(b)$.
(8 נק') **א)** בדקו כי R_f יחס שקילות.
(12 נק') **ב)** פונקציה $g:N\to N$ מוגדרת על-ידי $g(x)=z$ כאשר $z\le x,\ (x-z)\le 1$ ו- z מספר זוגי. מצאו מחלקת שקילות $2015/R_g$
(14 נק') **ג)** מצאו כל פונקציות $f:N\to N$ כך שקבוצת מנה N/R_f של N ביחס שקילות R_f מכילה בדיוק איבר אחד.

<u>פתרון</u> א) בואו נבדוק כי היחס R_g הוא היחס שקילות על N.
1. רפלקסיביות: צריך לבדוק כי $\forall a\in N,(a,a)\in R_g$. אבל $(a,a)\in R_g$ אם"ם $g(a)=g(a)$, ז.א., היחס R_g רפלקסיבי.
2. סימטריות: צריך לבדוק כי $\forall a,b\in N,(a,b)\in R_g\Rightarrow(b,a)\in R_g$. משום ש- $(a,b)\in R_g$ נקבל כי $g(a)=g(b)$ וכמובן $g(b)=g(a)$, ז.א., $(b,a)\in R_g$.
3. טרנזיטיביות : צריך לבדוק כי
$\forall a,b,c\in N,(a,b)\in R_g$ ו- $(b,c)\in R_g\Rightarrow(a,c)\in R_g$
לפי הגדרת היחס R_g נקבל
$(a,b)\in R_g\Leftrightarrow g(a)=g(b)$ ו- $(b,c)\in R_g\Leftrightarrow g(b)=g(c)$. כתוצאה מכך

$g(a)=g(c)$,ז.א., $(a,c)\in R_g$.
אנחנו הוכחנו כי היחס R_g הוא יחס שקילות על N .
ב) בואו ננסה לכתוב את פונקציה $g(x)=z$ בצורה נוחה יותר. משום ש- $z\le x\le z+1$ ו- z מספר זוגי (ז. א., $z=2k, k\in N$) נקבל $2k\le x\le 2k+1$.
עכשיו אנחנו יכולים לכתוב כי

$$g(2k)=g(2k+1)=2k,\ k\in N \qquad (1)$$

בואו נתאר את המחלקת שקילות $2015/R_g$:

$$2015/R_f=\{a\in N \mid a\ R_g\ 2015\}=\{a\in N \mid g(a)=g(2015)\}$$

לפי הנוסחה (1) נקבל כי $a=2015$ או $a=2014$. מכאן נובע כי

$$2015/R_g=\{2014,\ 2015\}$$

ג) משום ש- $\left|N/R_f\right|=1$ אנחנו יכולים להגיד כי קבוצת המנה N/R_f מכילה רק מחלקת שקילות אחת , ז.א., $N/R_f=\left\{a/R_f\right\}$ לכול $a\in N$. כתוצאה מכאן $a/R_f=b/R_f$ לכול $a,b\in N$. אזי נקבל $(a,b)\in R_f$ לכול $a,b\in N$, ז.א., $f(a)=f(b)$ לכול $a,b\in N$. במילים אחרות הפונקציה $f:N\to N$ היא קבועה, ז.א, $f(a)=n,\quad n\in N$.
קל להראות שאם פונקציה $f:N\to N$ קבועה אזי קבוצת המנה N/R_f מכילה רק איבר אחת. ההוכחה של הטענה הזו מתבצעת בסדר הפוך. כתוצאה מכך נקבל כי קבוצת המנה N/R_f מכילה רק איבר אחת אם"ם פונקציה $f:N\to N$ היא קבועה.

<u>שאלה 3:</u>

נגדיר יחס S על קבוצת המספרים הטבעיים N באופן הבא:
לכל a ו- b ב- N , $(a,b)\in S$ אם ורק אם יש ל- a ול- b אותם מחלקים הראשוניים וגם a מחלק את b. למשל, $(6,18)\in S$ אבל $(9,36)\notin S$.
(8 נק') **א)** הוכיחו ש- S הוא יחס סדר חלקי על N .
(12 נק') **ב)** מצאו כל איברים מינימאליים בקבוצה N עם יחס S
(14 נק') **ג)** מצאו כל איברים מכסימליים בקבוצה N עם יחס S .

פתרון. נסמן ב- $c(a)$ קבוצה של כל מחלקים ראשונים של מספר טבעי a. נזכור כי כל מספר טבעי שונה מ-0 ומ-1 ניתן לפרק לגורמים ראשונים. $c(a)=\{p_1,\ldots,p_t\}$ עבור $a=p_1^{\alpha_1}\ldots p_t^{\alpha_t}$.
נקבל $c(1)=\varnothing$, $c(0)=P$ - קבוצה של כל המספרים הראשונים.
לכן $(0,b)\in S$ אם ורק אם $b=0$, $(1,b)\in S$ אם ורק אם $b=1$ לכן $0,1$ הם איברים מקסימליים.
$(a,0)\in S$ אם ורק אם $a=0$, $(a,1)\in S$ אם ורק אם $a=1$ לכן $0,1$ הם איברים מינימליים.

א) 1) $c(a)=c(a)$ ו- $a=1a$ לכן $(a,a)\in S$ לכל $a\in N$ לכן S <u>רפלקסיבי</u>

2)נניח $(a,b)\in S$ ו- $(b,a)\in S$ לכן $b=ac$ ו- $a=bd$ לכן $a=acd$. אם $a=0$ או $b=0$ אז $a=b$
כי הוכחנו ש- 0 עומד ביחס רק עם עצמו. נשאר מקרה $a\neq 0, b\neq 0$ ו- $a=acd$ לכן
$cd=1, c\in N, d\in N$ לכן $c=d=1$ ו- $a=b$. קיבלנו כי S אנטי סימטרי

3) נניח $(a,b)\in S$ ו- $(b,c)\in S$ לכן $c(a)=c(b)=c(c)$ ו- $b=ad$ ו- $c=be$ לכן $c=ade$
לכן $(a,c)\in S$. קיבלנו כי S טרנזיטיבי. תשובה S הוא יחס סדר חלקי על N.

הערה חשובה הפעולה $\frac{b}{a}$ בהרבה מקרים לא מוגדרת ב- N ו- $\frac{0}{0}$ לא מוגדרת ולכן
להשתמש בסימון של שבר אפשר רק בתנאים מסוימים. יחד עם זה היחס $a|b$ מוגדר
על-ידי הנוסחה: קיים $c\in N$ כך ש- $ac=b$.

ב) קיבלנו קודם ש- $0,1$ הם איברים מינימליים. עבור $a=p_1^{\alpha_1}...p_t^{\alpha_t}\notin\{0,1\}$, כאשר
$\alpha_1\ge 1,...,\alpha_t\ge 1$ נקבל $c(a)=\{p_1,...,p_t\}$ לכן לפי הגדרת יחס S נקבל $(a,b)\in S$ אם ורק אם
$b=p_1^{\beta_1}...p_t^{\beta_t}$ כאשר $\alpha_1\le\beta_1,...,\alpha_t\le\beta_t$. לכן אם $c(a)=c(b)=\{p_1,...,p_t\}$ אז $(p_1\cdot...\cdot p_t, b)\in S$
ואם $(a, p_1\cdot...\cdot p_t)\in S$ אז $a=p_1\cdot...\cdot p_t$. תשובה $\{0,1,p_1\cdot...\cdot p_t\}$ כאשר $p_1,...,p_t$ מספרים
ראשונים ו- $t\ge 1, t\in N$ היא קבוצה של כל איברים מינימליים בקבוצה N עם יחס S.

ג) קיבלנו קודם ש- $0,1$ הם איברים מקסימליים. נבדוק כי אין איברים מקסימליים
נוספים. ניקח $a\notin\{0,1\}$. לפי הגדרה a מחלק את a^2 ו- $a^2-a=a(a-1)=0$ רק עבור
$a\in\{0,1\}$ וגם ל- a ול- a^2 יש אותם מחלקים ראשוניים לכן אם $a\notin\{0,1\}$ אז a לא
מקסימלי. תשובה $\{0,1\}$ היא קבוצה של כל איברים מקסימליים בקבוצה N עם יחס S.