פתרון של תרגיל 6: עקרון ההכלה והדחה. פונקציות יוצרות. רקורסיה.

1. מצאו מספר פתרונות טבעיים של

א) משוואה $x_1+x_2+x_3=7$ שונים זה מזה שמקיימים את התנאים $x_1\le 4, x_2\le 4, x_3\le 3$.

ב) משוואה $x_1+x_2+x_3=n$ שונים זה מזה שמקיימות את התנאים $x_1\le 4, x_2\le 4, x_3\le 3$.

ג) מצאו פונקציה יוצרת עבור מספר פתרונות טבעיות לאי-השיווין $x_1+x_2+x_3<10$.

פתרון של סעיפים זוגיים. ב). צריך למצוא מקדם של x^n בתבנית הבא

$$(1+x+x^2+x^3+x^4)^2(1+x+x^2+x^3)=\frac{(1-x^5)^2(1-x^4)}{(1-x)^3}=(1-2x^5+x^{10}-x^4+2x^9-x^{14})\sum_{k=0}^{\infty}C(k+2,k)x^k$$

לכן המקדם של x^n שווה ל-

$$C(n+2,n)-C(n-4+2,2)-2C(n-5+2,2)+2C(n-9+2,2)-C(n-14+2,2)=$$
$$=\frac{(n+2)!}{2\cdot n!}-\frac{(n-2)!}{2\cdot(n-4)!}-\frac{(n-3)!}{(n-5)!}+\frac{(n-7)!}{(n-9)!}-\frac{(n-12)!}{2\cdot(n-14)!}$$

נשים לב ששימוש בנוסחה שקיבלנו מוגבל כי לדוגמה עבור $n<10$ משתמשים רק ב-3 מחוברים ראשונים של הנוסחה ועבור $n\ge 12$ המקדם של x^n שווה ל-0.

2. מצאו מקדמים של x^{12} בתבניות הבאות

א) $(1+x+x^2+....)^{15}$

ב) $(x^6+x^7+x^8+....)^{15}$

ג) $(1+x^3+x^6+x^9....)^{15}$.

ד) $\frac{(1+x)^4}{(1-x)^6}$

פתרון של סעיפים זוגיים. ב). ברור כי $f(x)=(x^6+x^7+x^8+...)^{15}=x^{90}(1+x+x^2+...)^{15}$

מכאן נובע כי המקדם של x^{12} בפונקציה $f(x)$ שווה ל-0 .

ד) בואו נרשום את השבר $\frac{(1+x)^4}{(1-x)^6}$ כסכום של חזקות של x, ז.א., כטור חזקות של x:

$$\frac{(1+x)^4}{(1-x)^6}=(1+x)^4\cdot\left(\frac{1}{1-x}\right)^6=(1+x)^4(1+x+x^2+....)^6=$$
$$=(1+4x+6x^2+4x^3+x^4)\sum_{k=0}^{\infty}C(5+k,k)x^k$$

אזי המקדם של x^{12} בטור הזה שווה ל-

$$C(17,12)+4C(16,11)+6C(15,10)+4C(14,9)+C(13,8)=$$
$$=\frac{17!}{12!5!}+\frac{4\cdot 16!}{5!11!}+\frac{6\cdot 15!}{5!10!}+\frac{4\cdot 14!}{5!8!}+\frac{13!}{5!8!}$$

3. בכמה דרכים ניתן לבחור $3n$ כדורים מתוך כדורים אדומים, לבנים ושחורים כך שכל צבע לא יבחר יותר מ-$2n$ פעמים ?

4. כמה יש מספרים בין 1000 ו-2000 (לא כולל קצוות) שלא מתחלקים ב-7, לא מתחלקים ב-11 ולא מתחלקים ב-13

פתרון. בו נסמן ע"י $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ את התנאים הבאים: α_1 - מספר בין 1000 ו-2000 (לא כולל קצוות) מתחלק ב-7, α_2 - מספר בין 1000 ו-2000 (לא כולל קצוות) מתחלק ב-11, ו-α_3 - מספר בין 1000 ו-2000 (לא כולל קצוות) מתחלק ב-13. צריך למצוא $N(\overline{\alpha}_1\overline{a}_2\overline{a}_3)$. לפי עקרון ההכלה והפרדה נקבל:

$$N(\overline{\alpha}_1\overline{a}_2\overline{a}_3)=N-\sum_{i=1}^{3}N(\alpha_i)+\sum_{i,j=1}^{3}N(\alpha_i\alpha_j)-N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$$

בחישובים נשתמש בעובדות הבאות: $7\cdot 11\cdot 13=1001$ ו-מספר מספרים טבעיים חיובים קטנים מ-A ומתחלקים ב-k שווה ל-$[\frac{A-1}{k}]$-מספר שלם הכי קרוב ל-$[\frac{A-1}{k}]$ ולא גדול מ-$[\frac{A-1}{k}]$.

$$N(\alpha_1)=[\frac{1999}{7}]-[\frac{1000}{7}]=[\frac{999}{7}]+1=143, N(\alpha_2)=[\frac{999}{11}]+1=91, N(\alpha_3)=[\frac{999}{13}]+1=77$$

ו-$$N(\alpha_1\alpha_2)=[\frac{999}{77}]+1=13, N(\alpha_2\alpha_3)=[\frac{999}{143}]+1=7, N(\alpha_1\alpha_3)=[\frac{999}{91}]+1=11$$

ו-$$N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=[\frac{999}{1001}]+1=1$$

כתוצאה מכך נקבל כי $N(\overline{\alpha}_1\overline{a}_2\overline{a}_3)=999-143-91-77+13+7+11-1=908-113=795$.

5. כמה יש פונקציות "על" מקבוצה עם 5 איברים על קבוצה עם 3 איברים.

6. יהי a_n מספר פתרונות של המשוואה: $2a+3b+5c=n$.

א) מצא את פונקציה היוצרת של סדרה a_n כאשר $a,b,c\in N$ מספרים טבעיים כלשהם.

ב) מצא את פונקציה היוצרת של סדרה a_n, כאשר $a,b,c\in\{0,1\}$

ג) מצא את פונקציה היוצרת של סדרה a_n, כאשר $a,b,c\in N, a\le\alpha, b\le\beta, c\le\gamma$

פתרון של סעיפים זוגיים. ב). <u>תשובה:</u>

$$(1+x^2)(1+x^3)(1+x^5)=1+x^2+x^3+2x^5+x^7+x^8+x^{10}$$

7. מצאו מספר a_n מילים באורך n (בעלי n אותיות) באלף בית A,B,C,D שלא מכילים תתי מילים: א) AB, AC, ב) AA ג) AA, AB, AC, AD, ד) AA, BB.

פתרון של סעיפים זוגיים. ב). $a_1=4, a_2=4\cdot4-1=15$. נסמן ב-W_n קבוצת מילים באורך n באלף בית A,B,C,D שלא מכילים תת מילה AA.

$$W_n=\{Bw\mid w\in W_{n-1}\}\cup\{Cw\mid w\in W_{n-1}\}\cup\{Dw\mid w\in W_{n-1}\}\cup$$
$$\cup\{ABw\mid w\in W_{n-2}\}\cup\{ACw\mid w\in W_{n-2}\}\cup\{ADw\mid w\in W_{n-2}\}$$

לכן $a_n=3a_{n-1}+3a_{n-2}$ לכן $15=a_2=3a_1+3a_0=12+3a_0$ ו-$a_0=1$.

הפתרונות של המשוואה $x^2-3x-3=0$ הם $(3+\sqrt{21})/2$ ו- $(3-\sqrt{21})/2$ ולכן

$a_n=\alpha((3+\sqrt{21})/2)^n+\beta((3-\sqrt{21})/2)^n$ נחשב α,β מהמשוואות $a_0=1=\alpha+\beta$ ו-

$$a_1=4=\alpha(3+\sqrt{21})/2+\beta(3-\sqrt{21})/2=3(\alpha+\beta)/2+(\alpha-\beta)\sqrt{21}/2=3/2+(\alpha-\beta)\sqrt{21}/2$$

ולכן $(\alpha-\beta)=5/2\sqrt{21}$

לכן $\alpha=\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{4\sqrt{21}}$ ו- $\beta=\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{4\sqrt{21}}$. נקבל תשובה

$$a_n=\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{4\sqrt{21}}\right)((3+\sqrt{21})/2)^n+\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{4\sqrt{21}}\right)((3-\sqrt{21})/2)^n$$

ד) נסמן ב- W_n את הקבוצה מילים המותרות באורך n ובי- a_n מספר מילים ב- W_n, ז.א., $|W_n|=a_n$.

נסמן ב- S_1 את הקבוצה מילים המותרות מאורך n המתחילות מ- AA ונסמן ע"י S_2 את הקבוצה מילים מאורך n המתחילות מ- BB. אזי נקבל:

$$\{Cw\,|w\in W_{n-1}\}\cup\{Dw\,|w\in W_{n-1}\}\cup[\{Aw\,|w\in W_{n-1}\}\setminus S_1]\cup[\{Bw\,|w\in W_{n-1}\}\setminus S_2]=$$
$$[\{Cw\,|w\in W_{n-1}\}\cup\{Dw\,|w\in W_{n-1}\}\cup\{Aw\,|w\in W_{n-1}\}\cup\{Bw\,|w\in W_{n-1}\}]\setminus(S_1\cup S_2)\quad(*)$$

ברור כי $|S_1|$ שווה גם למספר מילים המותרות מאורך $n-1$ המתחילות מ- A, ו- $|S_2|$ שווה גם למספר מילים המותרות מאורך $n-1$ המתחילות מ- B. קל לראות כי

$$|S_1\cup S_2|=|W_{n-1}|-|\{Cw\,|w\in W_{n-2}\}\cup\{Dw\,|w\in W_{n-2}\}|=a_{n-1}-2a_{n-2}\quad(**)$$

כתוצאה מכך מהשוויוניים (*) ו- (**) נקבל כי $a_n=4a_{n-1}-(a_{n-1}-2a_{n-2})=3a_{n-1}+2a_{n-2}$

כאשר $a_1=4,\ a_2=14$ וכתוצאה מכך $a_0=1$. אזי משוואה אופיינית עבור היחס רקורסיה הקודמת

היא $\lambda^2-3\lambda-2=0$. משום שהשורשים $\lambda_1=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$ ו- $\lambda_2=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$ שונים, שונים וממשיים

נקבל כי פתרון הכללי של היחס שלנו הוא $a_n=C_1\left(\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n+C_2\left(\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n$ כאשר התנאים

התחיליים הם $a_0=1,\ a_1=4$. למציאת הקבועים C_1,C_2 נקבל מערכת משוואות לינאריות

$$\begin{cases}a_0=1=C_1+C_2\\ a_1=4=C_1\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}+C_2\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}\end{cases}$$

אזי $C_2=\dfrac{\sqrt{17}-5}{2\sqrt{17}}$ ו- $C_1=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2\sqrt{17}}$. פתרון של היחס רקורסיה שלנו הוא

$$a_n=\frac{5+\sqrt{17}}{2\sqrt{17}}\cdot\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n+\frac{-5+\sqrt{17}}{2\sqrt{17}}\cdot\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n$$

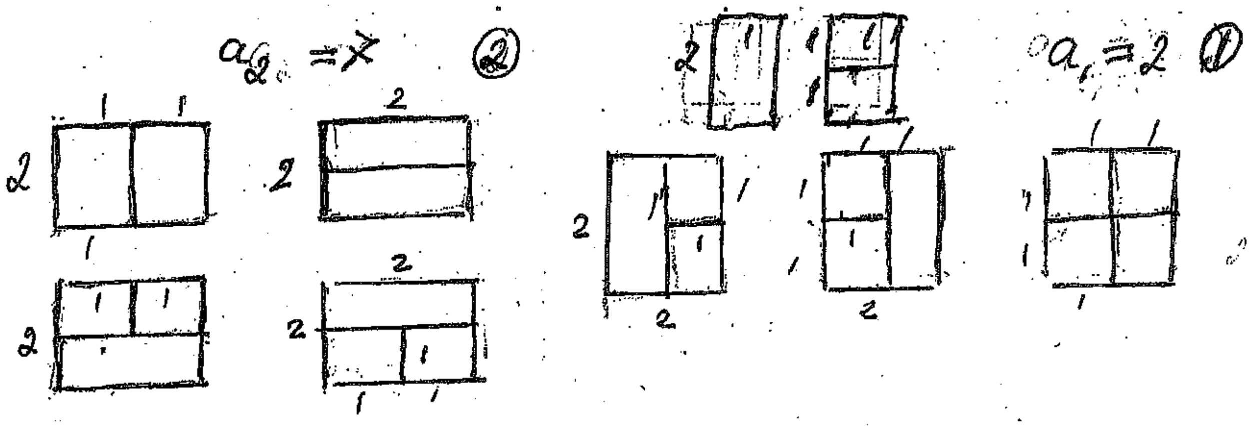
8. מצאו את נוסחה רקורסיה ונוסחה מפורשת עבור מספר הדרכים בהן ניתן לרצף

א) שביל בגודל $1\times n$ במרצפות בגודל 1×1 לבנות ובמרצפות בגודל 1×2 שחורות, וכחולות.

ב) מתחם בגודל $2\times n$ על-ידי משבצות בגדלים: 1×1 ו- 2×1 (אפשר להשתמש במשבצות בגודל 2×1 כמשבצות בגודל 1×2).

ג) מתחם בגודל $2\times n$ על-ידי משבצות לבנות ושחורות בגודל 1×1 ומשבצות לכחולות וצהובות בגודל 2×1 (אפשר להשתמש במשבצות בגודל 2×1 כמשבצות בגדל 1×2).

פתרון של סעיפים זוגיים. ב). נסמן ע"י a_n מספר אפשרויות לרצף מתחם בגודל $2\times n$ על-ידי משבצות בגדלים: 1×1 ו- 2×1. מכיוון שניתן להתחיל את הריצוף באחד מתשע אופנים:



נקבל שעבור a_n מתקיים יחס רקורסיה : $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$ (ריצוף שמתקבלת ע"י הזזה של מרצפת בגודל 2×1 ביחס של מרצפת אחרת בגודל 2×1 במשבצת בגודל 1×1 אנחנו לא לוקחים בחשבון). אזי משוואה אופיינית עבור היחס רקורסיה הקודמת היא $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$. משום שהשורשים $\lambda_1 = 3$ ו- $\lambda_2 = -1$ שונים וממשיים נקבל כי פתרון הכללי של היחס שלנו הוא $a_n = C_1(-1)^n + C_2 3^n,\ a_1 = 2,\ a_2 = 7$. אזי

$a_2 = 2a_1 + 3a_0$. כתוצאה מכך $a_0 = 1$. נקבל מערכת משוואות לינאריות:

$$\begin{cases} a_0 = 1 = C_1 + C_2 \\ a_1 = 2 = -C_1 + 3C_2 \end{cases}$$

אזי $C_2 = \frac{3}{4}$ ו- $C_1 = \frac{1}{4}$. פתרון של היחס רקורסיה שלנו הוא $a_n = \frac{1}{4}(-1)^n + \frac{3}{4}3^n$

9 . מצאו את a_n שזהו מספר הסידורים של 3 כדורים אדומים, 2 כדורים כחולים, ו-3 כדורים ירוקים בהם אין 3 כדורים סמוכים באותו צבע.

פתרון. בואו נסמן ע"י α_1 (במקביל נסמן ע"י α_2) התכונה שאומרת כי בסדרת כדורים הנ"ל שלושה קדורים אדומים (כחולים) הם סמוכים. לפי עקרון ההכלה והדחה נקבל:

$$N(\overline{\alpha}_1\overline{\alpha}_2) = N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) + N(\alpha_1\alpha_2)$$

מספר כל האפשרויות N לסדר את הכדורים הנ"ל שווה ל- $\frac{8!}{2!3!3!}$. בואו נחשב את ערך של $N(\alpha_1)$.

נסמן ע"י A בלוק של שלושה כדורים אדומים סמוכים, ע"י B כדור כחול וע"י C כדור ירוק. אזי $N(\alpha_1)$ שווה למספר מילים מאורך 6 שניתן להרכיב מהאותיות A,B,B,C,C,C. לפי הנוסחה למציאת מספר חליפות עם חזרות מורכבות מהאותיות האלה נקבל כי $N(\alpha_1) = \frac{6!}{2!3!}$. באותו אופן נקבל $N(\alpha_1) = \frac{6!}{2!3!}$ ו- $N(\alpha_1\alpha_2) = \frac{4!}{2!}$. כתוצאה מכך נקבל $N(\overline{\alpha}_1\overline{\alpha}_2) = \frac{8!}{2!3!3!} - 2\frac{6!}{2!3!} + \frac{4!}{2!} = 452$.

בהצלחה !