1. נוכיח את הטענות.

(א) ראו טענה 0.1 בפרק על אינטגרלים קווים ברשימות אשר באתר.

(ב) עשינו זאת בכיתה, אך הדבר ברור: נניח ש-ω מייצגת את השדה הוקטורי $F = (F_1, \ldots, F_n)$, אז ל-γ, פרמטריזציה של C, המסילה $\gamma(1-t)$ פרמטריזציה של $-C$. לכן, נקבל

$$\int_{-C} \omega = \int_0^1 F(\gamma(1-t)) \cdot \frac{d\gamma}{dt}(1-t)dt = \int_0^1 F(\gamma(u))\frac{d\gamma}{du}(u)\frac{dt}{du}du$$

כאשר $u = 1-t$. אז $t = 1-u$, ולכן $\frac{dt}{du} = -1$, ויוצא

$$\int_{-C} \omega = -\int_0^1 F(\gamma(u)) \cdot \frac{d\gamma}{du}du = \int_C \omega$$

כנדרש.

(ג) אם γ_1 פרמטריזציה של C_1 וגם γ_2 פרמטריזציה של C_2, ע"י חילוף משתנה אפשר להניח שהתחום של γ_1 הוא $[0,1]$, והתחום של γ_2 הוא $[1,2]$ אז

$$\int_0^1 F(\gamma_1(t)) \cdot \frac{d\gamma_1}{dt}dt + \int_0^2 F(\gamma_2(t))\frac{d\gamma_2}{dt}dt = \int_0^2 F(\gamma(t))\frac{d\gamma}{dt}dt$$

כאשר γהיא המסילה

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \leq 1 \\ \gamma_2(t) & 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

(לא בטוח ש-γ גזירה ב-1, אבל זה לא משנה, כמובן). בכל מיקרה האינטגרל מימן הוא, לפי הגדרה, האינטגרל על שרשור המסילות C_1, C_2 של התבנית הדיפרנציאלית ω המייצגת את השדה הוקטורי F.

2. אפשר להניח בלי הגבלת הכלליות ש-B הוא כדור היחידה הסגור (ואז $\partial B = S^{k-1}$). נסמן $\mathbb{R}^k_{i,+} = \{(x_1, \ldots, x_k) : x_i > 0\}$ (ובאופן אנלוגי $\mathbb{R}^k_{i,-}$). ראשית, נטפל בנקודות מן הצורה $(x_1, \ldots, x_k) \in \partial B$ כך ש-$x_k > 0$. הפונקציה

$$\tilde{g}(x_1, \ldots, x_{k-1}) = g(x_1, \ldots, x_{k-1}, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{k-1} x_i^2})$$

היא חח"ע ורציפה על

$$.S^{k-1} \cap \mathbb{R}^k_{k,+}$$

בנוסף, כיוון ש-$D_g(x)$ מדרגה k בכל נקודה, בהכרח $D_{\tilde{g}}(x)$ מדרגה $k-1$ בכל נקודה. לכן $\tilde{g}$ היא פרמטריזציה של $\partial(g(B \cap \mathbb{R}^k_{k,+}))$. באופן דומה נוכל לטפל ב-$S^{k-1} \cap \mathbb{R}^k_{i,+}$ וב-$S^{k-1} \cap \mathbb{R}^k_{i,-}$. כיוון שכל נקודה ב-$S^{k-1}$ שייכת (לפחות) לאחת מן הקבוצות הנ"ל טענתנו תוכח, אם נראה ש-$g(\partial B) = \partial g(B)$. ראשית, נראה

ש-$\partial g(B) \subseteq g(\partial B)$: לכל $p \in g(B) \setminus g(\partial B)$ יש כדור פתוח $g^{-1}(p) \in U_p \subseteq B \subseteq$ $\mathbb{R}^k$. נבחר כדור V_p סביב p. אז, מכיוון ש-g רציפה וחח"ע בהכרח $g^{-1}(V_p) \subseteq U_p$ עבור V_p מספיק קטן. זה מוכיח ש-p אינה בשפה של $g(B)$. מצד שני, אם $p \in \partial B$, ומכיוון שלפי הגדרה g מוגדרת חלקה (וחח"ע - מדוע?) בסביבה פתוחה $B \subseteq U$ אותו הטיעון בדיוק יוכיח שלכל סביבה פתוחה $p \in V_p$ בהכרח $g^{-1}(p) \in$ $\partial g^{-1}(V_p)$. אבל זה נכון לכל פרמטריזציה של $g(B) \cap V_p$, וזה מוכיח ש-p נקודת שפה של $g(B)$.

3. ראו בהמשך.

4. ראו בהמשך.

5. נחלק את ההוכחה לשני מקרים. כיוון ש-C מסילה סגורה פשוטה, היא מחלקת את המישור לשני חלקים - "הפנים" של C שהוא קבוצה קומפקטית, וה"חוץ" שהוא קבוצה לא חסומה (עובדה אינטואיטיבית זו כלל אינה פשוטה להוכחה, והיא נקראת משפט ז'ורדן). המקרה הראשון הוא ש-0 אינו שייך לפנים של C. במקרה זה התבנית הנתונה חלקה בכל הפנים של C ועל C עצמה. ראינו בכיתה (וגם קל לחשב זאת ישירות) ש-$d\omega = 0$. עתה אפשר להשלים את ההוכחה בשני אופנים: או להשתמש ישירות במשפט גרין כדי לקבל

$$0 = \int_D d\omega = \int_C \omega$$

כאשר D הפנים של המסילה D, או להשתמש בכך ש-C מסילה פשוטה כדי להסיק שב-D התבנית ω היא מדויקת, ולהשתמש במשפט היסודי של האינפי לאינטגרלים מסילתיים.
המקרה המעניין יותר הוא זה שבו $0 \in D$ (כמקודם, D הוא הפנים של C). כיוון ש-C סגורה D פתוחה. כיוון ש-C אינה עוברת בראשית הצירים, אפשר למצוא כדור סגור $0 \in B \subseteq D$, ותהי $S = \partial B$ (כלומר, S הוא מעגל סביב הראשית שאינו פוגש את C). נסמן ב-$T = \bar{D} \setminus B$ (ו-$\bar{D} = C \cup D$). נרצה להשתמש במשפט גרין עבור T. במקרה זה נקבל,

$$\partial T = C \cup S$$

כאשר על S יש את האורינטציה נגד כיוון השעון, ועל S את האורינטציה ההפוכה. אז נקבל

$$\int_C \omega - \int_S \omega = \int_T d\omega = 0$$

אבל ראינו ש-

$$\int_S \omega = 2\pi$$

ולכן נקבל את הנדרש. עלינו להסביר, אם כן, מדוע ניתן להשתמש במשפט גרין עבור התחום T. יהי $L = \{0\} \times \mathbb{R}$ (כלומר, L הוא ציר ה-y). יהי L^+ החלק האי-שלילי של L ו-L^- החלק האי-חיובי. אז מכיוון ש-C קומפקטית $L^+ \cap C$ מקבל מינימום ו-$L^- \cap C$ מקבל מקסימום. נסמנם y^+ ו-y^- בהתאמה. אז $y^+ > r$ ו-$y^- < -r$, כאשר r הרדיוס של B. תהי γ^+ המסילה (היורדת) מ-x^+ ל-r (לאורך

L) ו-γ^- המסילה העולה מ-y^- ל-$-r$ (לאורך L). עתה נתאר מסילה γ: נניח שעם האורינטציה הנתונה של C הנקודה y^- קודמת לנקודה y^+. נתחיל, אם כן, לטייל לאורך C בנקודה y^- ונתקדם עד שנגיע ל-y^+. נמשיך לאורך γ^+ ומשנגיע ל-r נמישך לאורך S עם כיוון השעון עד שנגיע ל-$-r$. קיבלנו מסילה סגורה אשר, בה"כ אינה מכילה את 0 (אם 0 שייך לפנים של המסילה שקיבלנו נלך על S נגד כיוון השעון). נסמן את המסילה הסגורה שקיבלנו δ_1. עתה נחזור את γ^- עד r, נעבור על חצי המעגל S בו לא ביקרנו, נחזור את γ^+, נגיע ל-y^+ ונמשיך עם C (באורינטציה הנתונה) עד שנחזור ל-y^-. גם המסילה הזו היא מסילה סגורה, נסמנה δ_2, והיא אינה מכילה את 0 (מדוע?). עתה, על כל אחת מבין δ_1 ו-δ_2 אפשר להפעיל את משפט גרין (כי 0 אינו בפנים של המסילות הללו). מצד שני:

$$\int_\gamma \omega = \int_{\delta_1} \omega + \int_{\delta_2} \omega$$

אבל אם נסמן C_1 את חלק המסילה C שנכלל ב-δ_1 ואת חלק המסילה S הנכלל ב-δ_1 נסמן S_1 נקבל

$$\int_{C_1} \omega + \int_{\gamma^+} \omega + \int_{S_1} \omega + \int_{\gamma^-} \omega = \int_{\delta_1} \omega$$

ובאופן דומה:

$$\int_{C_2} \omega - \int_{\gamma^+} \omega + \int_{S_2} \omega - \int_{\gamma^-} \omega = \int_{\delta_2} \omega$$

ובסה"כ נקבל:

$$\int_{\delta_1} \omega + \int_{\delta_2} \omega = \int_S \omega + \int_C \omega$$

וזה מה שהיה להראות.

6. הרעיון דומה להוכחה של שאלה 5, אבל דורש מעט יותר עבודה טכנית. הרעיון הבסיסי הוא כזה: נבחר פרמטריזציה γ של C שתחומה הוא $[0,1]$. יהיו $t_0 = 0$ ו-t_2 הנקודה הראשונה כך שקיים $t < t_2$ עבורו $\gamma(t_2) = \gamma(t)$. באופן אינדוקטיבי, נגדיר $0 < t_{2i} \le 1$ להיות הראשון כך שקיים $t_{2i-1} < t_{2i}$ המקיים $\gamma(t_{2i-1}) = \gamma(t_{2i})$ ו-$\gamma(t) \neq \gamma(t_{2i})$ לכל $t_{2i-1} < t < t_{2i}$. נסמן $t_n = 1$. נשים לב שלכל $0 < 2i < n$ המסילה $\gamma_{2i} : [t_{2i-1}, t_{2i}] \to C$, הצמצום של γ, היא מסילה סגורה. לכל i כנ"ל נגדיר מסילה $\delta_i : [t_{2i-1}, t_{2i}] \to C$ באופן הבא: $\delta_i(t) = \gamma(t)$ אם אין $j < i$ כך ש-$t_{2j-1} < t < t_{2j}$ ו-$\delta_i(t) = \gamma(t_{2j-1})$ אחרת. אז, C_i, התמונה של δ_i היא מסילה סגורה. לכן, לפי השאלה הקודמת

$$\frac{1}{2\pi} \int_{C_i} \omega = \pm 1$$

או

$$.\int_{C_i} \omega = 0$$

נגדיר מסילה δ באופן הבא: $\delta(t) = \gamma(t)$ אם $t_{2i} \le t \le t_{2i+1}$ לאיזה i, ו-$\delta(t) = \gamma(t_{2i})$ אם $t_{2i-1} \le t \le t_{2i}$ לאיזה i. אז D, התמונה של δ היא מסילה פשוטה. לכן:

$$\sum_{i=1}^{n/2} \int_{C_i} \omega + \int_D \omega = \int_C \omega.$$

ממה שראינו, מן הסעיף הקודם

$$\frac{1}{2\pi} \int_D \omega \in \mathbb{Z}$$

ולכן גם הסכום שבאגף שמאל של המשוואה האחרונה הוא מספר שלם.

7. נשים לב ש-$d(fg) = \sum \frac{\partial(fg)}{\partial x_i} dx_i$ ו-$\frac{\partial(fg)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} g + \frac{\partial g}{\partial x_i} g$. לכן,

$$d(fg) = gdf + fdg.$$

לכן התבנית $gdf + fdg$ היא מדויקת, ולכל מסילה סגורהף C מתקים

$$\int_C gdf + fdg = 0 = \int_C gdf + \int_C fdg,$$

כנדרש. אם המסילה אינה סגורה, אפשר להשתמש במשפט היסודי של האינפי.

8. שאלה 12 מובאת כדוגמה בספר של $Shifrin$ (בפרק 8 בחלק הדן על אינט-גרלים משטחים). הדוגמה גם מובאת ברשימות שפורסמו באתר, החלק העוסק באינטגרציה על יריעות.

9. ניתן פרמטריזציה של טבעם מביוס. נגדיר

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{1}{2} v \cos \pi u\right) \cos 2\pi u \\ \left(1 + \frac{1}{2} v \cos \pi u\right) \sin 2\pi u \\ \frac{1}{2} v \sin \pi u \end{pmatrix}$$

עבור $u, v \in [0,1]$. הבדיקה שזו אכן פרמטריזציה של טבעת מביוס אינה קשה (צריך לבדוק ש-$f(u,v) = f(u', v')$ אם ורק אם $u = 0$ ו-$u' = 1$ (או להיפך) ובנוסף $v + v' = 1$. כמו כן, צריך לבדוק שמטריצת היעקוביאן היא מדרגה 2 בכל נקודה). עתה, המרחב המשיק בנקודה $f(u,v)$ נפרש ע"י

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial u} \\ \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{pmatrix}$$

ואם נרשום בקיצור את שני המוקטורים הנ"ל

$$\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$$

נקבל שהנורמל בכל נקודה הוא

$$\frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v}.$$

נחשב את מטריצת היעקוביאן של f עבור $u=0,1$. עבור $u=0$ נקבל:

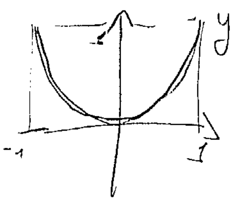
$$\begin{pmatrix} 0 & 2\pi & \frac{\pi}{2}v \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

עבור $u=1$ נקבל:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2\pi & \frac{\pi}{2}v \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ויוצא שהנורמלים בשני המקרים מנוגדים זה לזה.

$g:[-1,1] \to \mathbb{R}^2,\ g(t)=\begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$



$y=x^2$ ③

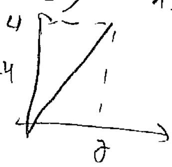
$$\int_C (x^2-2xy)\,dx+(y^2-2xy)\,dy = \int_{-1}^{1} \begin{pmatrix} t^2-2t^3 \\ t^4-2t^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(t^2-4t^3+2t^5-\cancel{2t^3}\right) dt = \left[\frac{t^3}{3}-t^4+\frac{t^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{3}-\cancel{1}+\frac{1}{5}\right)-$$

$$-\left(-\frac{1}{3}-\cancel{1}-\frac{1}{5}\right)=\frac{16}{15}$$

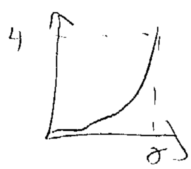
$g:[0,2]\to\mathbb{R}^2,\ g(t)=\begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}$

$$\int_C y\,dx+x^2\,dy = \int_0^2 \begin{pmatrix} 2t \\ t^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} dt = \int_0^2 9t^2\,dt = 3\cdot 8 = 24$$



$y=2x$ ②

$g:[0,2]\to\mathbb{R}^2,\ g(t)=\begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$



$y=x^2$ ①

$$\int_C y\,dx+x^2\,dy = \int_C \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt = \int_0^2 (t^2+2t^3)\,dt =$$

$$= \left[\frac{t^3}{3}+\frac{t^4}{2}\right]_0^2 = \frac{8}{3}+8 \neq 24$$

ולמעשה — [illegible] ① ≠ ② ולכן שהשדה $\begin{pmatrix} y \\ x^2 \end{pmatrix}$ לא משמר.

$$\gamma(t) = (t-1, e^{t^4}, t^2+1),\quad t\in[0,1]$$ ③ ③

$$\int_\gamma e^{-x}\ln y\,dx - \frac{e^{-x}}{y}\,dy + z\,dz =$$

$$= \int_0^1 \begin{pmatrix} e^{1-t}\cdot t^4 \\ -e^{1-t}/e^{t^4} \\ t^2+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4t^3 e^{t^4} \\ 2t \end{pmatrix} dt =$$

$$= \int_0^1 \left\{ e^{1-t}t^4 - 4e^{1-t}t^3 + 2t^3 + 2t \right\} dt = \frac{1}{2}$$

④ ④

$\Leftarrow$ קשירה $\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = (2x-2y) - (\cancel{2x}-2y) = 4x+4y \neq 0$

ל-F יש פוטנציאל.

$$\varphi(x,y) = x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 + C$$

$$\operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2x - x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix} \neq 0$$ ②

השדה לא משמר.

②

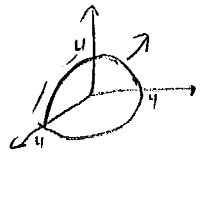
$$\operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} -6x^2y - 8x^3z \\ 1 - 8x^2z^2 \\ -12y^3 \end{pmatrix} \neq 0$$

השדה לא משמר.

$z = \sqrt{16-x^2-y^2}$, $z'_x = -\frac{x}{z}$, $z'_y = -\frac{y}{z}$

$x^2+y^2 \le 4$

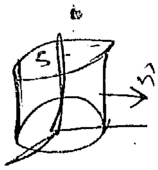
$S:\quad x^2+y^2+z^2 = 16,\ z \ge 0$ ⑧



$$\int \vec{F}\cdot\vec{ds} = \int_{x^2+y^2\le 4} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -z'_x \\ -z'_y \\ 1 \end{pmatrix} dx\,dy =$$

$$= \int_{x^2+y^2\le 4} \frac{-x^2-y^2+z^2}{z}\,dx\,dy = \int_{x^2+y^2\le 4} \frac{16-x^2-y^2}{\sqrt{16-x^2-y^2}}\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^4 r\cdot r\,dr\,d\varphi = 2\pi\cdot\frac{4^3}{3} = \frac{128\pi}{3}$$



$S: \begin{array}{l} x^2+y^2=9 \\ 0 \le z \le 5 \end{array}$ $\quad \vec{F}=\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$ ② ⑧

$g(\varphi,z)=\begin{pmatrix} 3\cos\varphi \\ 3\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$

$g'_\varphi=\begin{pmatrix} -3\sin\varphi \\ 3\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{matrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$

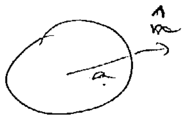
$g'_z=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$g'_\varphi \times g'_z=\begin{pmatrix} 3\cos\varphi \\ 3\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$ ✓

$$\int \vec{F}\cdot d\vec{s} =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^5 \begin{pmatrix} 6\cos\varphi \\ 6\sin\varphi \\ 2z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3\cos\varphi \\ 3\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi\, dz =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^5 18\, d\varphi\, dz = 180\pi$$



$S: r=a$ $\quad , \vec{F}(r,\theta,\varphi)=\dfrac{\vec{r}}{r^3}$ ב ⑧

(צ. כמו שלה קודם)

$$\int_S \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_S \vec{F}\cdot\hat{r}\, ds = \int_S \frac{\vec{r}\cdot\hat{r}}{r^3}\, ds = \int_S \frac{ds}{r^2} =$$

$(r=a)$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{r^2} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta = 4\pi$$

⑨

$S: x^2+y^2+z^2=R^2$ $\quad \vec{F}=\begin{pmatrix} xy \\ yz \\ x^2 \end{pmatrix}$

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ x^2 \end{pmatrix} \frac{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}{R} R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (x^2y+y^2z+x^2z)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} R^3\left(\sin^3\theta\cos^2\varphi\sin\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi\cos\theta + \sin^2\theta\cos^2\varphi\cos\theta\right)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= R^3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\underbrace{\cancel{\sin^3\theta\cos^2\varphi\sin\varphi}}_{\cos^2\varphi \perp \sin\varphi} + \sin^2\theta\cos\theta\right)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 2\pi R^3 \underbrace{\int_0^{\pi}\sin^3\theta\cos\theta\, d\theta}_{=0} = 0$$

$S: \begin{array}{l} x^2+z^2=a^2 \\ y^2+z^2=a^2 \end{array}$

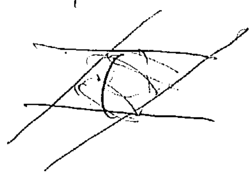
E חיתוך בין שני גלילים המאונכים של צירי מסומנים גלילים ⑩

$$V(E) = \int_E 1\, dx\, dy\, dz = \int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}}\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}} dy\, dx\, dz =$$

$$= \int_{-a}^{a} \left(2\sqrt{a^2-z^2}\right)^2 dz = \int_{-a}^{a} 4(a^2-z^2)\, dz = \frac{16}{3}a^3$$

10 המשטח מחולק ל- S לשטחים הבאים

$S_1: y=g_1(x,z)=\sqrt{a^2-z^2}$ גרף הפונקציה על העיגול
$x^2+z^2\le a^2$



$S_2: y=g_2(x,z)=-\sqrt{a^2-z^2}$ "
$x^2+z^2\le a^2$

$S_3: x=g_3(y,z)=\sqrt{a^2-z^2}$ "
$y^2+z^2\le a^2$

$S_4: x=g_4(y,z)=-\sqrt{a^2-z^2}$ "
$y^2+z^2\le a^2$

$$A(S)=\sum_{i=1}^{4}A(S_i)$$

כיוון ש-
$$A(S_1)=A(S_2)=A(S_3)=A(S_4)$$
ולכן
$$A(S)=4A(S_1)$$

$$A(S_1)=\iint_S \underbrace{\hat{n}(x,y,z)}_{\text{פונקציה נורמל}}\cdot d\vec{S}=\iint_{x^2+z^2\le a^2}\hat{n}(x,y,z)\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}-y'_x\\1\\-y'_z\end{pmatrix}}_{\left\|\begin{pmatrix}-y'_x\\1\\-y'_z\end{pmatrix}\right\|\hat{n}}dxdz=$$

$$=\iint_{x^2+z^2\le a^2}\sqrt{1+{y'_x}^2+{y'_z}^2}\,dxdy=\ldots=4a^2$$

$$\Rightarrow A(S)=16a^2$$

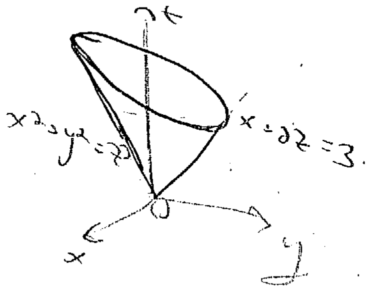
1 11 2 המשטח מתואר ע"י הפונקציה

$$g(u,v)=\begin{pmatrix}u^2\\v^2\\\sqrt{2}uv\end{pmatrix}$$ כאשר
$0\le u\le\sqrt{2}$
$0\le v\le 1$

זה כדי להימנע משורשים בכל העניין

$$A(S)=\iint_S \hat{n}\,d\vec{S}=\iint_U\|g'_u\times g'_v\|dudv=\iint_U\left\|\begin{pmatrix}2u\\0\\\sqrt{2}v\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\2v\\\sqrt{2}u\end{pmatrix}\right\|dudv=$$

$$=\int_0^1\int_0^{\sqrt{2}}2\sqrt{2}(u^2+v^2)\,dudv=\ldots=4$$



$$\begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ x+2z \le 3 \\ z \ge 0 \end{cases}$$

(2) (11)

$$3(x+1)^2+4y^2=12 \overset{\text{השלמה לריבוע}}{\Leftrightarrow} x^2+y^2 = z^2=\left(\frac{3-x}{2}\right)^2$$

על המישור

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x+1)^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$$

$$\underbrace{\left\{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+\frac{y^2}{3}\le 1\right\}}_{}, \quad z=\sqrt{x^2+y^2}$$

אז S משטח מעל G וגו'

$$A(S)=\iint_S \hat{n}\,dS = \iint_G \underbrace{\sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}}_{=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}=\sqrt{2}}\,dx\,dy = \ldots = 2\pi\sqrt{6}$$

(16)

זהה לנוסחה שעשינו בכיתה לשטח של כדור A

התמונה על ידי עקום G בעזרת משפט Green

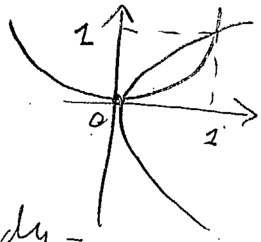
גאוס + העובדה ש $\operatorname{div}\left(\frac{x}{3},\frac{y}{3},\frac{z}{3}\right)=1$

(15)

$$\iint_G \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix} dS \overset{\text{גאוס}}{=} \iiint_V \operatorname{div}\begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix} dV =$$

$$= \iiint_V (2x+2y+2z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (2x+2y+2z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_0^1\int_0^1 (1+2y+2z)\,dy\,dz = \int_0^1 (2+2z)\,dz = 3$$



$x \geq y^2$
$y \geq x^2$

(א) (13)

$$\int_C \overset{F_1}{(2xy - x^2)}dx + \overset{F_2}{(x + y^2)}dy = \Big|^{\text{גרין}} = \iint_S \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy = \int_0^1 \int_{y^2}^{y} (1-2x)\,dxdy =$$

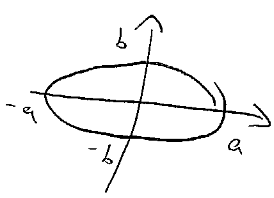
$$= \int_0^1 \left[x - x^2\right]_{y^2}^{y} = \int_0^1 \left[(y - y^2) - (y^2 - y^4)\right] dy =$$

$$= \int_0^1 (y^4 - 2y^2 + y)\,dy = \frac{1}{5} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{30}$$

(ב)

$$C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\int_C \overset{F_1}{(x+y)}dx + \overset{F_2}{(x-y)}dy \Big|^{\text{גרין}} = \iint_S (1-1)\,dxdy = 0$$



(ג)

$$\int_C (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$$

$$F = \begin{pmatrix} y^2 - z^2 \\ z^2 - x^2 \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix} = (-2y - 2z, -2x - 2z, -2x - 2y)$$

במישור המשפט לפי כל שלו [illegible] שטח

התחום S C. D וי המשטח $x + y + z = \frac{3a}{2}$

$$g(x,y) = \left(x, y, \frac{3a}{2} - x - y\right)$$

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2: \quad \Omega_1: \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \leq x + y \\ y \leq a \end{array} \right\}$$

$$\Omega_2: \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{2} \leq x \leq a \\ x + y \leq \frac{3a}{2} \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \iint_S \operatorname{rot}\vec{F} \cdot d\vec{s} =$$

$$= \iint_\Omega \operatorname{rot}\vec{F} \cdot \begin{pmatrix} -z'_x \\ -z'_y \\ 1 \end{pmatrix} dxdy = -4 \iint_\Omega (x + y + z)\,dxdy = -4 \iint_\Omega \frac{3a}{2}\,dxdy =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \dots = \frac{9a^3}{2}$$

$$\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$$

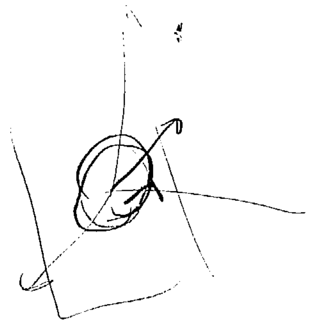
$$\vec{F} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} \qquad \operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

נבחר את S
להיות העיגול
המשטח במישור
$x+y+z=0$ של
C

$$\int_C \vec{F}\cdot\vec{dl} = \iint_S \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} ds$$

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ו- S הינו מעגל ברדיוס a במישור זה



אומר

$$\int_C \vec{F}\cdot\vec{dl} = \iint_S \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} ds =$$

$$= \iint_S \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\cdot\frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{3}}\, ds = \frac{3}{\sqrt{3}}\iint_S ds = \frac{3}{\sqrt{3}}A(S) = \frac{3}{\sqrt{3}}\pi a^2$$