תרגיל 4 - חדו"א של פונקציות מרובות משתנים לפיזיקאים

אינטגרלים מרובים

שאלות המסומנות בכוכבית הן שאלות בונוס ולא חובה להגישן

את כל החישובים בשאלות יש לנמק

1) עבור הקבוצות הבאות, קבע האם מדובר בתחום אינטגרציה

(א) $\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2\le z^2\right\}$

(ב) $\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2\le z^2, z\ge 0\right\}$

(ג) $\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2\le z, z\ge 0\right\}$

(ד) $\{(e^{x+y},e^x)|(x,y)\in U\}$ כאשר U המשולש החסום על ידי שלושת הישרים

$y=x+1, y=-x+3, y=0$

2) יהיו Ω_1,Ω_2 תחומי אינטגרציה ותהיה f פונקציה אינטגרבילית על $\Omega_1\cup\Omega_2$, רשמו נוסחה עבור

$$\int_{\Omega_1\cup\Omega_2} f dV$$

במקרה שבו $\Omega_1\cap\Omega_2$ קבוצה מנפח אפס ובמקרה שבו $\Omega_1\cap\Omega_2$ תחום אינטגרציה.

נסמן $R=[0,1]\times[0,1]$

3) עבור הפונקציות הבאות, הוכיחו כי הן אינן אינטגרביליות ב-R

(א)

$$f(x,y)=\begin{cases} x, & y\in\mathbb{Q}\\ 1-x, & y\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

(ב)

$$f(x,y)=\begin{cases} 1, & xy\in\mathbb{Q}\\ 0, & xy\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

4) תהיה

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{cases} 0, & 0\le y\le\frac{1}{2}\\ 1, & \frac{1}{2}<y\le 1\end{cases}$$

הוכיחו כי f אינטגרבילית על R וחשבו את $\int_R fdA$

5) תהיה

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{cases}1, & x=\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},...\\0, & otherwise\end{cases}$$

הוכיחו כי f אינטגרבילית על R וחשבו את $\int_R fdA$

6) יהיה $S\subset\mathbb{R}^n$ מלבן ותהיה $f:S\to\mathbb{R}$ אי שלילית ורציפה ונניח בנוסף כי קיימת נקודה ב־S שבה הפונקציה שונה מאפס, הוכיחו כי $\int_S fdA>0$

7) יהיה $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ תחום ונניח כי $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ רציפה

(א) יהיהו m,M המקסימום והמינימום שהפונקציה מקבלת בתחום, הוכיחו כי

$$m\cdot vol(\Omega)\leq\int_\Omega fdV\leq M\cdot vol(\Omega)$$

(ב) הסיקו מהסעיף הקודם את משפט ערך הביניים האינטגרלי: בהנחה ש־Ω תחום קשיר הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in\Omega$ כך ש־

$$\int_\Omega fdV=f(c)\cdot vol(\Omega)$$

$*$ 8) תהיה f פונקציה רציפה ואינטגרבילית בסביבה של נקודה a, הוכיחו כי

$$\lim_{\epsilon\to0^+}\frac{1}{volB(a,\epsilon)}\int_{B(a,\epsilon)}fdV=f(a)$$

9) בדקו כי האינטגרל על תחום מוגדר היטב, כלומר לא תלוי בבחירת המלבן שאליו מרחיבים את הפונקציה.

10) חשבו את האינטגרלים הבאים

(א) $\int_{[0,1]\times[1,3]}\frac{x}{x^2+y}dA$

(ב) $\int_{[-1,1]\times[1,2]\times[2,3]}(x+y)zdV$

11) נניח כי הפונקציה f רציפה בתחום האינטגרציה, עבור האינטגרלים החוזרים הבאים מצאו את תחום האינטגרציה והחליפו את סדר האינטגרציה

(א) $\int_0^1\int_x^1 f(x,y)dydx$

(ב) $\int_0^1 \int_0^{2x} f(x,y)dydx$

(ג) $\int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} f(x,y)dydx$

(ד) $\int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^y f(x,y,z)dzdydx$

(ה) $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} f(x,y,z)dzdydx$

(ו) $\int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{x+y} f(x,y,z)dzdydx$

12) חשב את האינטגרלים הבאים ישירות וגם על ידי חילוף סדר האינטגרציה

(א) $\int_0^1 \int_0^x (x+y)dydx$

(ב) $\int_0^1 \int_{x^2}^x \frac{x}{1+y^2}dydx$

$*$ 13) בתרגיל הזה נוכיח את משפט "גזירה תחת סימן האינטגרל": נניח כי $f : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ו־$\frac{\partial f}{\partial x}$ גם כן רציפה. נגדיר

$$F(x) = \int_c^d f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dy$$

(א) הוכיחו כי הפונקציה F רציפה

רמז: השתמשו בעובדה ש־f רציפה במידה שווה (למה זה נכון?)

(ב) הראו כי F גזירה ובנוסף

$$F(x) = \int_c^d \frac{\partial}{\partial x} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dy$$

רמז: הגדירו פונקציות עזר

$$\varphi(t) = \int_c^d \frac{\partial}{\partial x} f\begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix} dy$$

$$\Phi(x) = \int_a^x \varphi(t)dt$$

והוכיחו כי $F(x)-\Phi(x)$ פונקציה קבועה

(ג) נסו להסביר מה קורה כאשר גם גבולות האינטגרציה הם פונקציות של x

$*$ 14) נניח כי f רציפה על תחום האינטגרציה, הוכיחו את הזהות

$$\int_0^x\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\cdots\int_0^{x_{n-1}}f(x_n)dx_n\cdots dx_3dx_2dx_1=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x(x-t)^{n-1}f(t)dt$$

רמז: התחילו מהמקרים $n=2,3$

15) חשבו נפח של חרוט עם בסיס ברדיוס a וגובה h בקואורדינטות גליליות וכדוריות (כלומר בשתי דרכים)

16) מצאו את המרחק הממוצע מהמרכז של נקודות בכדור תלת מימדי

17) בהינתן נקודה על שפת עיגול, מצאו את המרחק הממוצע של נקודה בפנים העיגול מנקודה זו. חזרו על החישוב עבור כדור תלת מימדי ונקודה על הספירה המקיפה אותו.

18) מצאו את מרכז המסה של הצורה החסומה על ידי המישורים

$$x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

הניחו התפלגות מסה אחידה.

19) מצאו שטח של אליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1$ ונפח של אליפסואידה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1$

$*$ 20) יהיה S התחום החסום על ידי

$$x\geq 0,\quad y+x^2=0,\quad x-y=2,\quad x^2-2x+4y=0$$

חשבו את האינטגרל

$$\int_S(x-y+1)^{-2}$$

בעזרת קואורדינטות חדשות

$$x=u+v, y=v-u^2$$

21) יהיה V_n הנפח ה־n מימדי של כדור היחידה ב־$\mathbb{R}^n$. הוכיחו כי

$$V_n=\begin{cases}\frac{\pi^m}{m!}, & n=2m\\ \frac{\pi^m2^{2m+1}}{(2m+1)!}, & n=2m+1\end{cases}$$

רמז: שימו לב שהמקרים $n=1,2,3$ כבר ידועים לכם והשתמשו באינדוקציה בקפיצות של 2