אנליזת פורייה ואדוות (0231 − 1 − 201) - מבחן מסכם

סמסטר א' תשס"ו, מועד א'

המרצה: ד"ר אילן הירשברג

משך הבחינה: 3 שעות.
חומר עזר מותר בשימוש: אין.
תאריך: 7.2.2006

ענו על ארבע שאלות מתוך החמש. אם עניתם על כל החמש, רק ארבע מתוכן תיבדקנה. לכל השאלות משקל זהה. נמקו את תשובותיכם בזהירות, ונסחו במדויק כל משפט עליו אתם מסתמכים. הוספת מידע בלתי רלוונטי לתשובתכם עלולה לפגוע בניקוד הניתן לשאלה.

1. כזכור, גרעין פייר במקרה הלא-מחזורי נתון על ידי:

$$\tilde{K}_r(x) = \frac{r}{2\pi}\left(\frac{\sin(rx/2)}{rx/2}\right)^2$$

(כאשר $\tilde{K}_r(0)$ מוגדרת כך שהפונקציה תהיה רציפה). תוכלו להשתמש ללא הוכחה בעובדה ש- $\widehat{\tilde{K}_r}(\xi) = \max\{1-|\xi/r|, 0\}$.

(א) (10 נק') הגדירו את המושג "סדרת ריס", והראו כי אם $r > \pi$, אזי סדרת הפונקציות $\{\tilde{K}_r(x-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ היא סדרת ריס (במרחב $L^2(\mathbb{R})$).

(ב) (5 נק') עבור $r > 0$ נתון, תנו נוסחא מפורשת לפונקציה g ב- $\{\tilde{K}_r(x-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ המקיימת $span$

$$\hat{g}(\xi) = \cos(\xi)\cdot\max\{1-|\xi/r|, 0\}$$

(ג) (10 נק') נסמן $h(x) = 2\tilde{K}_2(x) - \tilde{K}_1(x)$. הראו כי $h * \tilde{K}_1 = \tilde{K}_1$.

2. תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ פונקציה מחזורית-2π וגזירה אינסוף פעמים. נניח שמתקיים כי

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{5^n}\int_{-\pi}^{\pi} \left|f^{(n)}(x)\right|^2 dx = 0$$

הראו כי קיימים קבועים $\alpha_{-2}, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ כך ש-

$$f(x) = \alpha_{-2}e^{-2ix} + \alpha_{-1}e^{-ix} + \alpha_0 + \alpha_1 e^{ix} + \alpha_2 e^{2ix}$$

3. תהי f פונקציה מחזורית-2π, ואינטגרבילית בקטע $[-\pi, \pi]$. כרגיל, אנו מסמנים $\|f\|_\infty = \sup|f(x)|$.

(א) (8 נק') הראו כי לכל n מתקיים $\|\sigma_n(f)\|_\infty \le \|f\|_\infty$.

(ב) (8 נק') הראו כי קיימת פונקציה f המקיימת את התנאים לעיל, כך ש- $\|S_n(f)\|_\infty > \|f\|_\infty$ עבור n כלשהו.

(ג) (9 נק') נניח כי לכל $k \neq 0$ מתקיים כי $|\hat{f}(k)| \le C/|k|$ עבור קבוע C כלשהו. הראו כי

$$\|S_n(f)\|_\infty \le \|f\|_\infty + 2C$$

לכל n. (רמז: מצאו חסם ל- $\|S_n(f) - \sigma_n(f)\|$).

4. נסמן, עבור $r > 0$,

$$F_r(x) = \begin{cases} re^{-rx} & | \quad x \ge 0 \\ 0 & | \quad x < 0 \end{cases}$$

(א) (5 נק') חשבו מפורשות את $F_1 * F_1(x)$.

(ב) (10 נק') הוכיחו כי אוסף הפונקציות F_r מהווה גרעין סומבילית חיובי (כאשר $r \to \infty$).

(ג) (10 נק') תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ פונקציה חסומה ואינטגרבילית על כל קטע סופי. נניח כי בנקודה x_0 קיים לפונקציה גבול משמאל, שנסמנו a (כלומר, $a = \lim_{x\nearrow x_0} f(x)$). הוכיחו כי

$$\lim_{r\to\infty} F_r * f(x_0) = a$$

5. נסחו והוכיחו את משפט הקירוב של ויירשטראס.