גבולות אינדוקטיביים (גבולות ישרים)

נניח שנתונה סדרה של אלגבראות C^*

$A_1, A_2, A_3, \ldots$

והומומורפיזמים

$$\varphi_{n+1,n} : A_n \to A_{n+1}$$

נסמן $\varphi_{m,n} : A_n \to A_m$

עבור $m>n$ ע"י: $\varphi_{m,n} = \varphi_{m,m-1}\circ\varphi_{m-1,m-2}\circ\cdots\circ\varphi_{n+1,n}$

הגבול האינדוקטיבי של המערכת האינדוקטיבית

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_{2,1}} A_2 \xrightarrow{\varphi_{3,2}} A_3 \xrightarrow{\varphi_{4,3}} \cdots$$

היא אלגברת C^* $A = \varinjlim (A_n, \varphi_{n+1,n})$

שמקיימת את התכונות הבאות:

יש הומומורפיזמים $\varphi_{\infty,n} : A_n \to A$

כך ש: $\varphi_{\infty,m}\circ\varphi_{m,n} = \varphi_{\infty,n}$

A נוצרת על ידי התמונות $\varphi_{\infty,n}(A_n)$,

ואם יש אלגברת C^* D והומומורפיזמים $\psi_{\infty,n} : A_n \to D$

עם התכונה הזו.

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\varphi_{2,1}"] \arrow[drr, "\varphi_{\infty,1}"] \arrow[ddrr, dashed, "\psi_{\infty,1}"'] & A_2 \arrow[r, "\varphi_{3,2}"] \arrow[dr, "\varphi_{\infty,2}"] \arrow[ddr, dashed, "\psi_{\infty,2}"] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{\infty,3}"] \arrow[dd, dashed, bend left, "\psi_{\infty,3}"] & \cdots \arrow[dl] \arrow[ddl, dashed] \\
 & & A \arrow[d, dashed, "\psi"] & \\
 & & D &
\end{tikzcd}$$

אז קיים הומומורפיזם (יחיד)

$\psi : A \to D$

שהוא A , $\psi\circ\varphi_{\infty,n} = \psi_{\infty,n}$.

מהתכונה האוניברסלית שהאלגברה הזאת מקיימת שאם קיים גבול אינדוקטיבי של הנ"ל יחיד (עד כדי איזומורפיזם יחיד באופן קנוני עם ההעתקות המשרות $\varphi_{n+1,n}$).
(תרגיל).

מדוע קיים כזה?

נגדיר: $\bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n = \{(a_1,a_2,\dots) \mid a_n\in A_n,\ \|a_n\| \to 0\}$

$\prod_{n=1}^{\infty} A_n = \{(a_1,a_2,\dots) \mid a_n\in A_n,\ \sup_n \|a_n\| < \infty\}$

אז $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ היא אלגברת C^* (עם פעולות איבר-איבר, ו- $\|(a_n)\| = \sup_n \|a_n\|$)

ו- $\bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n$ הוא אידיאל ב- $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$.

נגדיר $B = \{(a_n) \in \prod_{n=1}^{\infty} A_n \mid \|\varphi_{n+1,n}(a_n) - a_{n+1}\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\}$

תרגיל: B תת-אלגברת C^* של $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$.

אז $B \triangleright \bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n$

נגדיר $A := B / \bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n$

ונגדיר $\tilde{\varphi}_{\infty,n} : A_n \to B$

על ידי $\tilde{\varphi}_{\infty,n}(x) = (\underbrace{0,0,\dots,0}_{n-1 \text{ פעמים}}, x, \varphi_{n+1,n}(x), \varphi_{n+2,n}(x), \dots)$

אם נסמן $\pi : B \to A$ (העתקת המנה), אז נגדיר $\varphi_{\infty,n} = \pi \circ \tilde{\varphi}_{\infty,n}$.

עבור $x \in A_n$ יש חזרה: $\tilde{\varphi}_{m,\infty} \circ \varphi_{n,m}(x) - \tilde{\varphi}_{n,\infty}(x)$

הולך ל-0 בגלל הקומוטטיביות

ו-$n, n+1, \dots, m$

ולכן הכל נמצא ב- $\ker \pi$

ולכן $\varphi_{m,\infty} \circ \varphi_{n,m} = \varphi_{n,\infty}$,

צריך להראות ש-A נוצרת על ידי התמונות של A_n, ומקיימת את התכונה האוניברסלית – <u>תרגיל</u>.

אנחנו נניח בהכרח ש-$\varphi_{n,n+1}$ חד-חד-ערכיות, כך שאפשר לחשוב על $A_n \subseteq A_{n+1}$, ו- $A = \overline{\bigcup A_n}$.

אבל יש מקרים שבהם מעניין להסתכל על העתקות מקושרות שהן לא חד-חד-ערכיות.

<u>דוגמאות</u>: $H = \ell^2(\mathbb{N})$.

נגדיר $\varphi_{n,n+1} : M_n \to M_{n+1}$

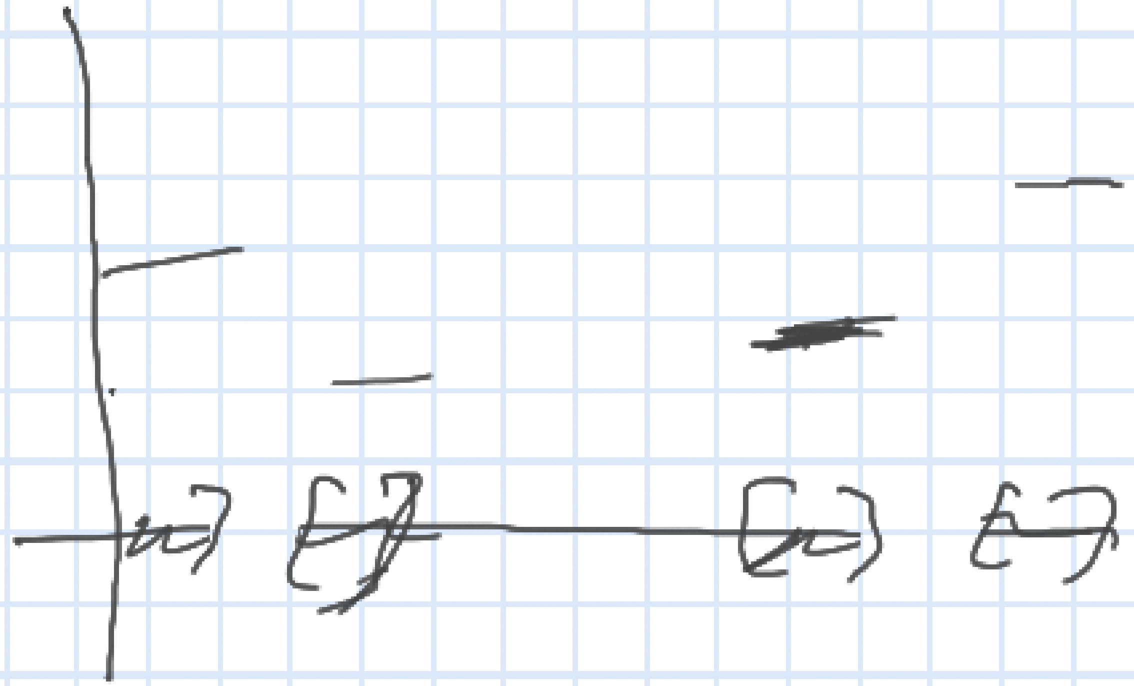
ע"י $\varphi_{n,n+1}(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

אז $\varinjlim (M_n, \varphi_{n,n+1}) \cong K(H)$

אפשר לחשוב על האיחוד של M_n באופן הבא: כ- M_∞ - מטריצות אין-סופיות ריבועיות עם מספר סופי של מקדמים $\neq 0$, וזה צפוף ב-$K(H)$.

ב) X קבוצת קנטור (ההגדרה הרגילה של מכפלה-קרטזית של $\{0,1\}$).

אז $C(X)$ הוא גבול אינדוקטיבי של אלגבראות C^* סוף מימדיות.



אז $C(X)$ הינו איחוד של אלגבראות מהצורה $\mathbb{C}^{2^n}$ כאשר חושבים עליהן כפונקציות קבועות מקומית על השלב ה-n של בניית קבוצת קנטור ע"י הוספת הקטעים המתאימים.

השיכון שבו משכנים את $\mathbb{C}^{2^n}$ ב-$\mathbb{C}^{2^{n+1}}$ הינו:

$$\varphi_{n+1,n}(z_1, z_2, \dots, z_{2^n}) = (z_1, z_1, z_2, z_2, z_3, z_3, \dots, z_{2^n}, z_{2^n})$$

<u>תרגיל:</u> נניח ש-

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A$$

ו-

$$A = \overline{\bigcup A_n}$$

$\varphi_{n+1,n} : A_n \to A_{n+1}$ הינו השיכון, אז

$$A = \varinjlim (A_n, \varphi_{n+1,n}).$$

3) אם היינו לוקחים בדוגמא הקודמת

$$\varphi_{n+1,n} : \mathbb{C}^{2^n} \to \mathbb{C}^{2^{n+1}}$$

להיות

$$\varphi_{n+1,n}(z_1, \dots, z_{2^n}) = (z_1, \dots, z_{2^n}, 0, \dots, 0)$$

אז $\varinjlim(\mathbb{C}^{2^n}, \varphi_{n+1,n}) = c_0(\mathbb{N})$ הסדרות ששואפות ל-0.

למה: נניח שנתונות מערכות אינדוקטיביות:

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_{2,1}} A_2 \xrightarrow{\varphi_{3,2}} A_3 \xrightarrow{\varphi_{4,3}} \cdots$$

$$B_1 \xrightarrow{\psi_{2,1}} B_2 \xrightarrow{\psi_{3,2}} B_3 \xrightarrow{\psi_{4,3}} \cdots$$

ונניח שנתונים הומומורפיזמים

$\pi_n : A_n \to B_n$

כך ש-

$$\begin{tikzcd} A_n \arrow[r, "\varphi_{n+1,n}"] \arrow[d, "\pi_n"'] & A_{n+1} \arrow[d, "\pi_{n+1}"] \\ B_n \arrow[r, "\psi_{n+1,n}"] & B_{n+1} \end{tikzcd}$$

הדיאגרמה מתחלפת

$$(\pi_{n+1} \circ \varphi_{n+1,n} = \psi_{n+1,n} \circ \pi_n)$$

אז קיים הומומורפיזם יחיד $\pi : A \to B$

כך ש- $\pi \circ \varphi_{\infty,n} = \psi_{\infty,n} \circ \pi_n$

לכל n, ואם ה-π_n הם

איזומורפיזמים, אז π הוא איזומורפיזם.

דוגמא:

$A_n = M_{2^n}$

$\varphi_{n+1,n} : A_n \to A_{n+1}$

$$\varphi_{n+1,n}(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

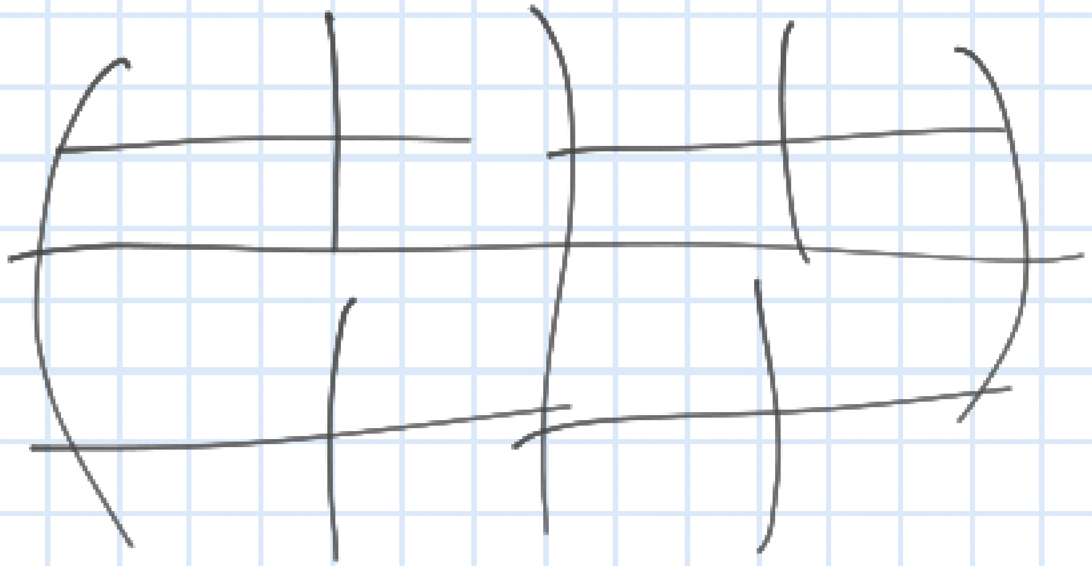
הגבול האינדוקטיבי נקרא אלגברת UHF

Uniformly hyperfinite

מסדר 2^∞

או אלגברת CAR

(Canonical anticommutation relations)



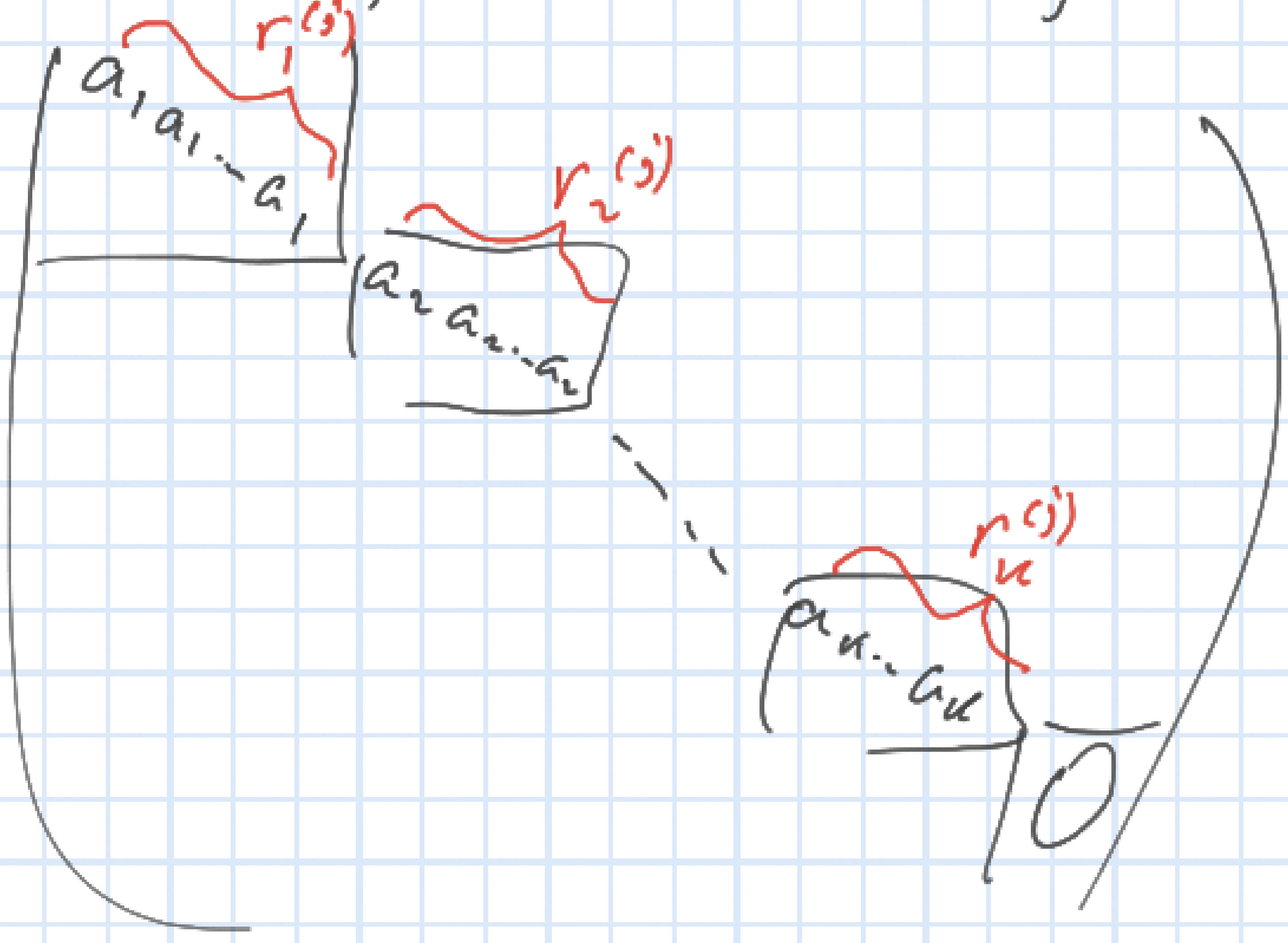
השבוע: רכבות

הגדרה: אלגברת AF (approximately finite dimensional) היא גבול אינדוקטיבי של אלגבראות C^* סוף ממדיות. (אותנו נניח שהעתקות ההכלה הן חד-חד-ערכיות)

למה: נניח ש
$$A_1 = M_{n_1}\oplus M_{n_2}\oplus\cdots\oplus M_{n_k}$$
$$A_2 = M_{m_1}\oplus M_{m_2}\oplus\cdots\oplus M_{m_\ell}$$
אז כל הומומורפיזם $\varphi : A_1 \longrightarrow A_2$ הוא שקול אוניטרית (ב-A_2) להומומורפיזם מהסוג הבא:

$\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ הוא סכום ישר של מטריצות כך שלכל $j=1,\ldots,\ell$

המטריצה ה-j היא שטרידה בלוקים מהצורה



$$r_1^{(j)} n_1 + r_2^{(j)} n_2 + \cdots + r_k^{(j)} n_k \le m_j$$ ו-

φ שומר יחידה אם ורק אם יש שוויון באי-שוויון

הערה: המספור לרכיב ה-j הוא גבוה של A_1, שהיא אלגברה של מטריצות ריבועיות, ועכשיו לבנות ושיכות מהמשפט לעצי הגבול של אלגבראות כאלה.

אם כן, מערכת אינדוקטיבית של אלגבראות מט
סוף מימדיות

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_{1,2}} A_2 \xrightarrow{\varphi_{2,3}} A_3 \xrightarrow{\varphi_{3,4}} \cdots$$

הדיאגרמה ברטלי (Bratteli)
של המערכת היא הדיאגרמה שמורכבת
מהגרפים המתאימים הנ״ל

דוגמאות לדיאגרמות ברטלי שמתאימות
לדוגמאות שכבר ראינו:

$$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to \cdots$$

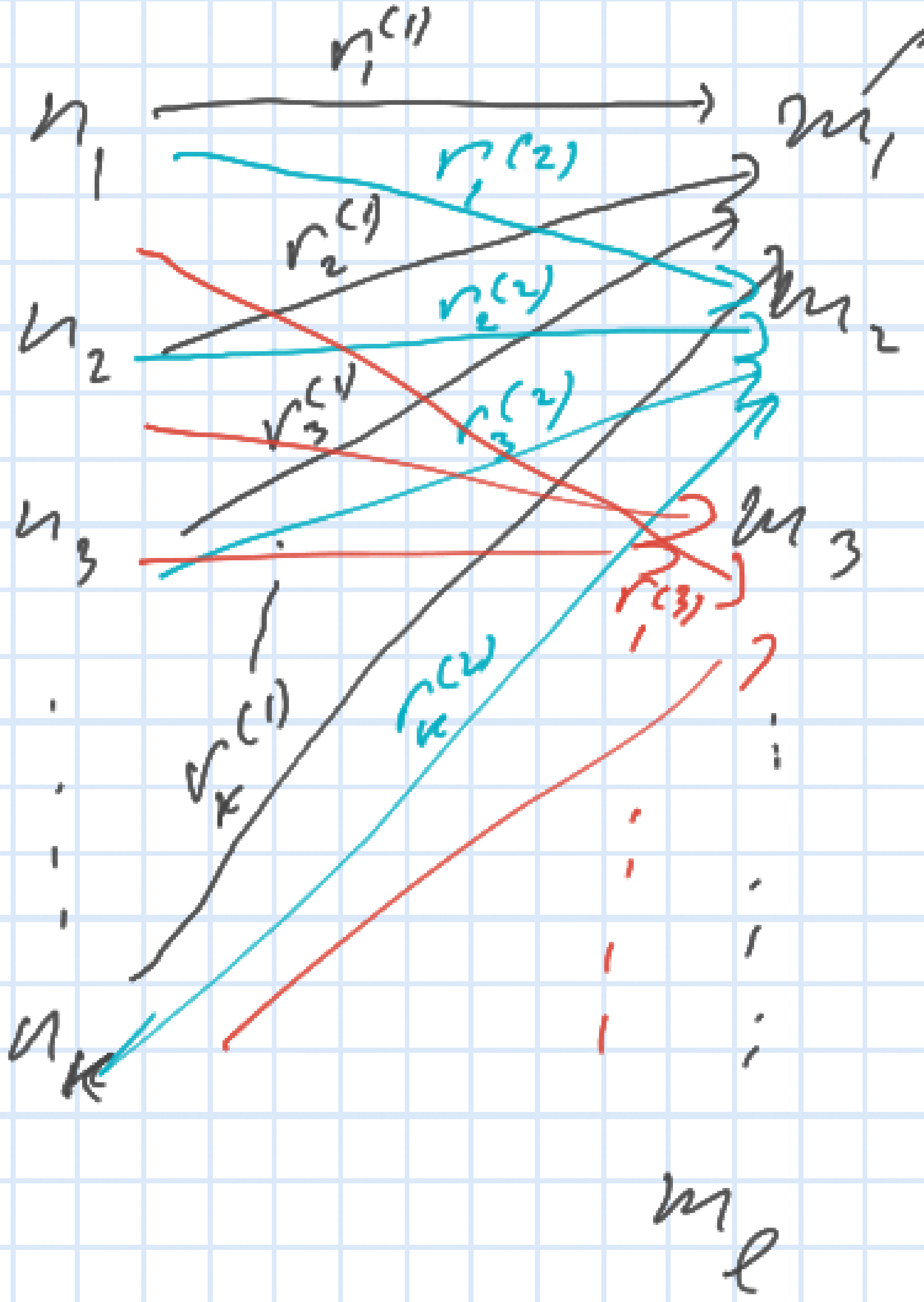
— מתאים ל $K(\ell^2(\mathbb{N}))$

(אם לא מסמנים את החץ, הכוונה היא
לריבוי 1, אז מקובל בריבוי 2
גם לפעמים נכתוב חץ כפול).

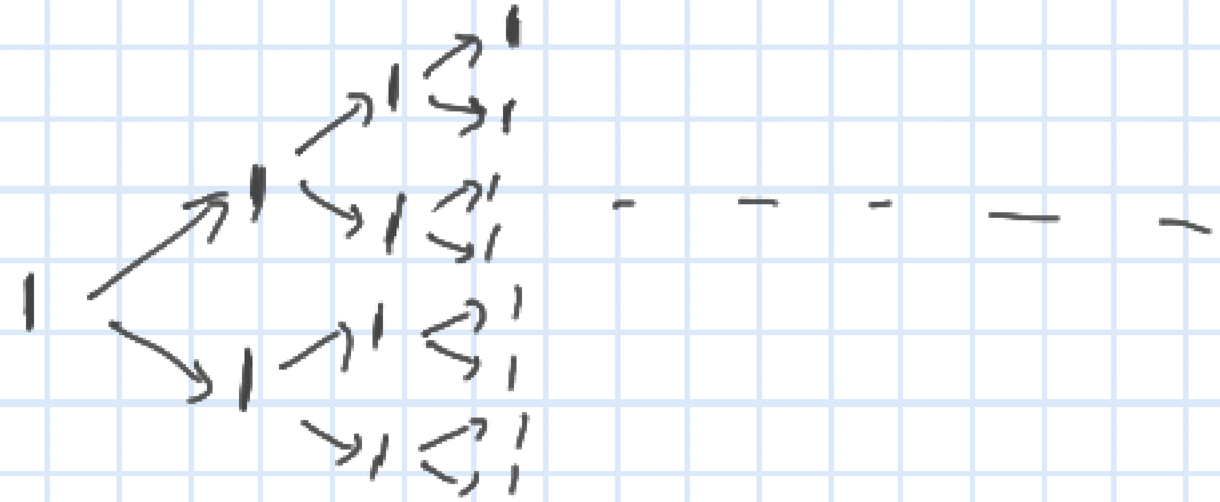
אם כן, עיקרי שקילות אונ(יט)ארית בין A_2
אפשר לתאר את

$$\varphi: A_1 \to A_2$$

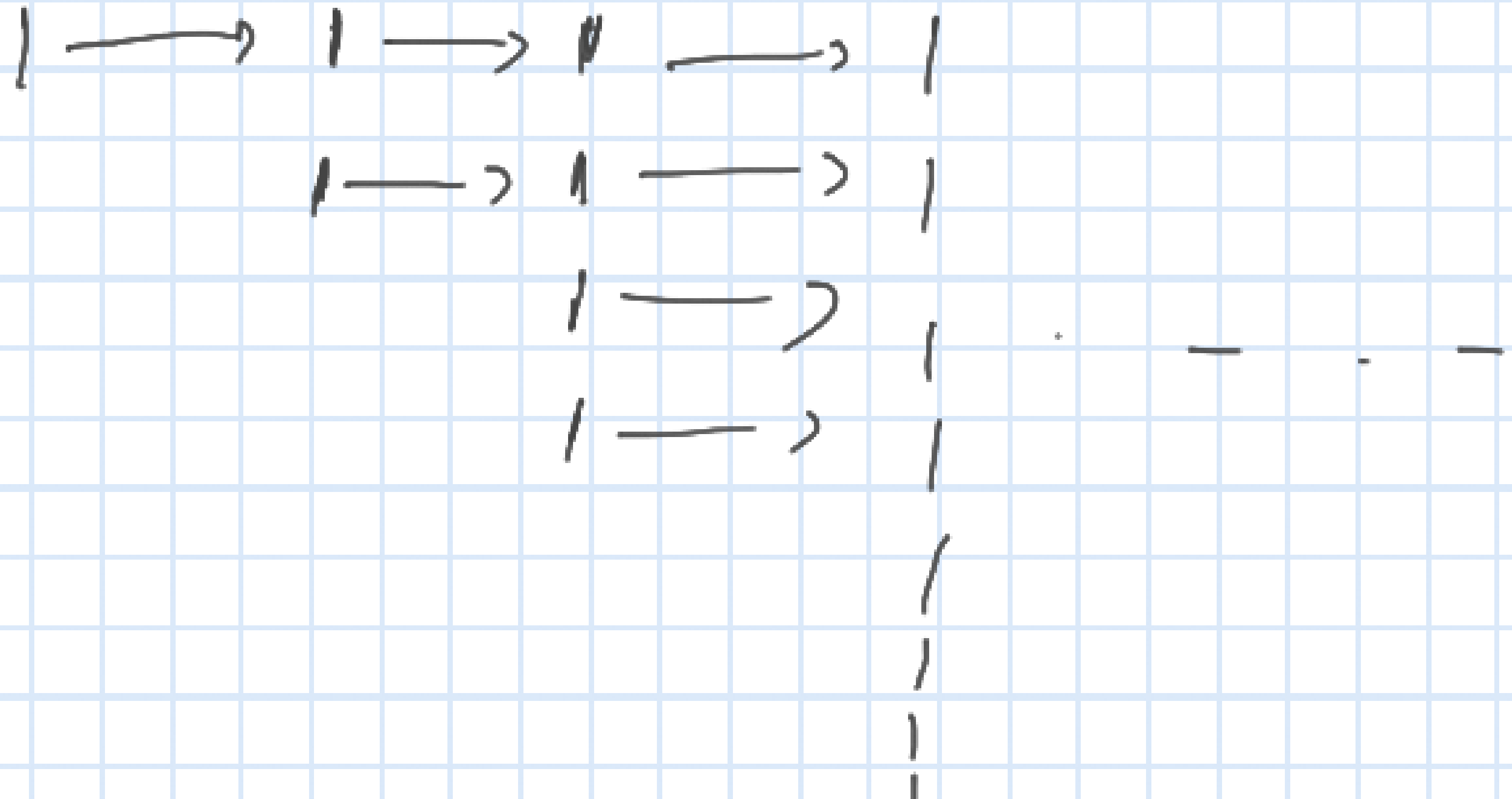
על ידי גרף מסוים



המערכת האינדוקטיבית שבנינו עבור $C(X)$
כאשר X הקבוצת קנטור



המערכת שמתאימה לנו את $C_0(\omega)$:



לגבי הדיאגרמה שמתאימה לאלגברת CAR:

$$1 \rightrightarrows 2 \rightrightarrows 4 \rightrightarrows 8 \rightrightarrows \cdots$$

תזכורת: השיכון הוא $a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

אפשר לפרק את זה לשני הומומורפיזמים

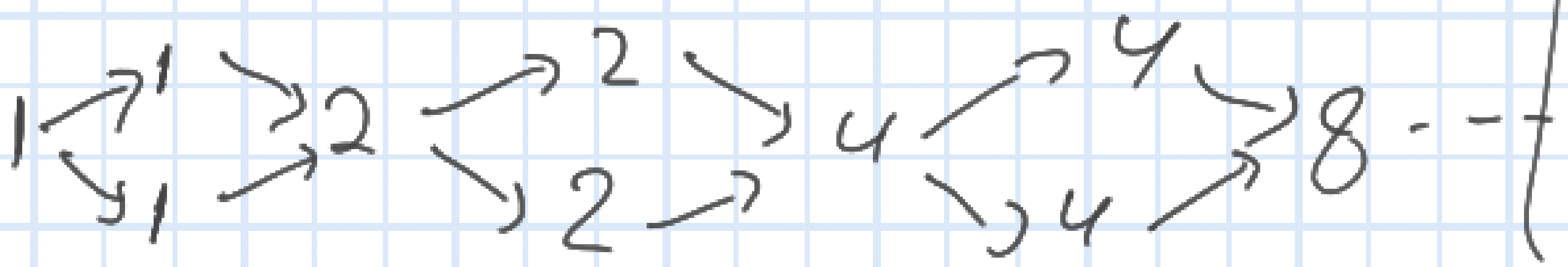
$$M_{2^n} \longrightarrow M_{2^n} \oplus M_{2^n} \longrightarrow M_{2^{n+1}}$$

$$a \longmapsto (a,a)$$

$$(a,b) \longmapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

הגבול האינדוקטיבי יוצא זהה אם נכניס את שלב הביניים של $M_{2^n} \oplus M_{2^n}$.

ואז דיאגרמת ברטלי תהיה:



אם נשאיר רק את שני הבודדים ונכפיל
המקורות הן צבעים, ונקבל את התוצאה