משפט: נניח שיש

$$A_1 \xrightarrow{\alpha_{2,1}} A_2 \xrightarrow{\alpha_{3,2}} \cdots$$

$$B_1 \xrightarrow{\beta_{2,1}} B_2 \xrightarrow{\beta_{3,2}} \cdots$$

מערכות אינדוקטיביות של אלגבראות C^* סוף ממדיות ונניח שיש להן אותה דיאגרמת ברטלי, אז

$$\varinjlim (A_n, \alpha_{n+1,n}) \cong \varinjlim (B_n, \beta_{n+1,n})$$

הוכחה: אנחנו יודעים ש- $A_n \cong B_n$ לכל n. נבחר $\varphi_n : A_n \xrightarrow{\cong} B_n$ איזומורפיזם לכל n.

אין סיבה להניח שהדיאגרמה

$$\begin{tikzcd}
A_n \arrow[r, "\alpha_{n+1,n}"] \arrow[d, "\varphi_n"'] & A_{n+1} \arrow[d, "\varphi_{n+1}"] \\
B_n \arrow[r, "\beta_{n+1,n}"'] & B_{n+1}
\end{tikzcd}$$

מתחלפת.

אבל ידוע לנו, ממשפט שבו אותה דיאגרמת ברטלי, שקיים אוניטרי $u_{n+1} \in B_{n+1}$ כך ש- $\beta_{n+1,n} \circ \varphi_n = Ad\, u_{n+1} \circ \varphi_{n+1} \circ \alpha_{n+1,n}$

נגדיר $\psi_n : A_n \xrightarrow{\cong} B_n$ ואוניטריים $v_n \in B_n$

כך: $v_1 = 1$, $\psi_1 = \varphi_1$.

נניח שהגדרנו את $\psi_1, \dots, \psi_n$

אז נגדיר $v_{n+1} = \beta_{n+1,n}(v_n) u_{n+1}$

ו- $\psi_{n+1} = Ad(v_{n+1}) \varphi_{n+1}$!

אז

$$\beta_{n+1,n} \circ \psi_n = \beta_{n+1,n} \circ Ad(v_n) \circ \varphi_n =$$

$$= Ad(\beta_{n+1,n}(v_n)) \circ \beta_{n+1,n} \circ \varphi_n =$$

$$= Ad(\beta_{n+1,n}(v_n)) \circ Ad(u_{n+1}) \varphi_{n+1} \circ \alpha_{n+1,n}$$

$$= Ad(\beta_{n+1,n}(v_n) u_{n+1}) \circ \varphi_{n+1} \circ \alpha_{n+1,n} = \psi_{n+1} \circ \alpha_{n+1,n}$$

אבל במקום זה משפט אינטרפולציה בין הגבולות האינדוקטיביים.

למה: לכל ε ולכל n קיים δ כך שאם $A \supseteq B$ אלגבראות ו- $p_1, \dots, p_n \in A$ הטלות ניצבות (כלומר $p_i p_k = 0$ אם $i \neq k$) ו- $dist(p_k, B) < \delta$ לכל k אז קיימות הטלות ניצבות $q_1, \dots, q_n \in B$ כך ש- $\|q_k - p_k\| < \varepsilon$ לכל k.

יתרה מזו, אם $p_1 + \dots + p_n = 1$ אז אפשר לקבל $q_1 + \dots + q_n = 1$.

הוכחה: $n=1$ — מיידי מתרגיל הבית.

המעבר האינדוקטיבי: נניח שהוכחנו עבור n ונראה עבור $n+1$, נקבע δ כך שהוא מספיק קטן כמו בהמשך. נניח שמצאנו δ כבהוכחה.

נניח שמצאנו $q_1, \dots, q_n$ הטלות ניצבות כך ש- $\|p_k - q_k\| < \varepsilon'$ לכל k.

נסמן $q = q_1 + q_2 + \dots + q_n$ ו- $p = p_1 + \dots + p_n$ אז $\|p - q\| < n\varepsilon'$.

נגדיר: $(1-q)B(1-q)$ ו- $dist(p_{n+1}, (1-q)B(1-q))$

קיים $x \in B$ כך ש- $\|p_{n+1} - x\| < \varepsilon$

אפשר להניח ש- x צמוד לעצמו, מחליפים אותו ב- $\frac{1}{2}(x + x^*)$.

אז $\|P_{n+1}-(1-q)x(1-q)\| =$

$$= \|P_{n+1}-(1-q)P_{n+1}(1-q)\| + \underbrace{\|(1-q)(P_{n+1}-x)(1-q)\|}_{<\varepsilon'}$$

$$< \|P_{n+1}-(1-q)P_{n+1}+(1-q)(P_{n+1}-P_n(1-q))\| + \varepsilon' =$$

$$\le \|qP_{n+1}\| + \|P_{n+1}q\| + \varepsilon'$$

$$\underset{\|q-p\|<n\varepsilon'}{\le} \|\underbrace{pP_{n+1}}_{=0}\| + \|\underbrace{P_{n+1}p}_{=0}\| + (2n+1)\varepsilon' =$$

$$= (2n+1)\varepsilon'$$

$$\operatorname{dist}(P_{n+1},(1-q)B(1-q)) < (2n+1)\varepsilon'$$

כמו שבחרנו $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2n+1}$, מהגדרה ניתן

קיים $q_{n+1}\in(1-q)B(1-q)$

כך ש- $\|P_{n+1}-q_{n+1}\|<\varepsilon$

ומההגדרה, כמו שנדרש להוכיח.

(רק שצריך היה לבחור מראש ε' שמקיים ל- $\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{2n+1}$)

עבור אלגברה C^* סוף ממדית

$$A = M_{n_1}\oplus\cdots M_{n_k}$$

נסמן את היחידות המטריציאליות

$e_{ij}^{(m)}\in M_{n_m}$ עבור $i,j\in\{1,\dots,n_m\}$

כן מתקיים $e^{(m_1)}_{i_1j_1}e^{(m_2)}_{i_2j_2} =$

$$= \delta_{m_1,m_2}\delta_{j_1,i_2}e^{(m_1)}_{i_1j_2}$$

ו- $e_{ij}^{(m)*} = e_{ji}^{(m)}$

למה: לכל $0<\varepsilon$ ולכל $n\in\mathbb{N}$ קיים $0<\delta$ כך שלכל $A,B\subseteq D$ C^*-אלגבראות כך ש- $\dim(A)\le n$, ו-D עם יחידה, אם $\{e_{ij}^{(m)}\}$ מערכת יחידות מטריציונליות של A כך ש- $\mathrm{dist}(e_{ij}^{(m)},B)<\delta$ לכל m,i,j אז קיים אוניטרי $u\in D$ כך ש $uAu^*\subseteq B$ ו- $\|1-u\|<\varepsilon$.

הוכחה: בלי הגבלת הכלליות $1\in A,\ 1\in B$.
__מקרה א':__ A קומוטטיבית.
יהי ε. כמו בלמה הקודמת, כך שצריך למצוא את האוניטרי u. נשתמש בסימונים של הלמה הקודמת.

נתון $0<\varepsilon'$ שנבחר בהמשך.
נתונות $p_1,\dots,p_n\in A$ הטלות ניצבות כך ש- $p_1+\dots+p_n=1$.
מהלמה הקודמת, קיים $0<\delta(n,\varepsilon')=:\delta$ כך שאם $\mathrm{dist}(p_k,B)<\delta$ לכל k אז יש הטלות ניצבות $q_1,\dots,q_n\in B$ כך ש- $\|p_k-q_k\|<\varepsilon'$ לכל k.

נגדיר $x=\sum_{k=1}^{n}q_kp_k$

אז
$$x^*x=\sum_{k=1}^{n}p_kq_kp_k\ge$$
$$\ge(1-\varepsilon')\sum_{k=1}^{n}p_k=(1-\varepsilon')\cdot 1$$
באופן דומה $xx^*\ge(1-\varepsilon')\cdot 1$
אז ל-ε' קטן, x הפיך.

כמו כן, $q_k x = x p_k = q_k p_k$

יהי u האוניטרי מהפירוק הפולארי של x $\left(u = x\cdot (x^*x)^{-1/2}\right)$

נשים לב ש- $x^*x p_k = p_k x^*x$ לכל k, ולכן כל איבר ב- $C^*(x^*x)$ מתחלף עם p_k לכל k, ובפרט $(x^*x)^{-1/2}$ מתחלף עם ה- p_k,

לכן $q_k u = u p_k$ לכל k, ולכן $u p_k u^* = q_k \in B$.

בנוסף,

$$\|u-1\| \le \|u-x\| + \|x-1\| = \underbrace{\|u\|}_{=1}\cdot\|1-(x^*x)^{-1/2}\| + \sum_{k=1}^{n}\|(q_k-p_k)\|\underbrace{\|p_k\|}_{\le 1}$$

$$\le 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon'}} + n\varepsilon'$$

אז צריך לבחור ε' כך ש-

$$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon'}} + n\varepsilon' \le \varepsilon.$$

<u>המקרה הכללי:</u> בעזרת המקרה הראשון, אפשר להחליף את A על-ידי אוניטרי V כך ש- $Ve_{ij}^{(m)}V^* \in B$ לכל m ולכל $i,j \in \{1,\ldots,a_m\}$.

אם כן, אפשר להניח בלי הגבלת הכלליות ש- $e_{ij}^{(m)} \in B$ לכל m,i,j.

נסמן ערכים $x_{ij}^{(m)} \in B$ כך ש- $\|x_{ij}^{(m)} - e_{ij}^{(m)}\|$ קטן עבור סוג שנצטרך לבחור, ונניח ש- $x_{ij}^{(m)} = e_{ij}^{(m)}$,

נסמן $y^{(m)}_{l,ij} = e^{(m)}_{ll} x^{(m)}_{l,ij} e^{(m)}_{jj}$

אז $y^{(m)}_{l,ij} \in B$ וכן

$$\|y^{(m)}_{l,ij} - x^{(m)}_{l,ij}\| = \|e^{(m)}_{ll} x^{(m)}_{l,ij} e^{(m)}_{jj} - x^{(m)}_{l,ij}\|$$

$$\le \|e^{(m)}_{ll}(x^{(m)}_{l,ij} - e^{(m)}_{l,ij})e^{(m)}_{jj}\| + \|e^{(m)}_{l,ij} - x^{(m)}_{l,ij}\| < 2\delta$$

אז

$$y^{(m)*}_{l,ij} y^{(m)}_{l,ij} = e^{(m)}_{jj} x^{(m)*}_{l,ij} e^{(m)}_{ll} x^{(m)}_{l,ij} e^{(m)}_{jj}$$

$\Leftarrow$ $\|y^{(m)*}_{l,ij} y^{(m)}_{l,ij} - e^{(m)}_{jj}\| < 4\delta$

וכן $y^{(m)*}_{l,ij} y^{(m)}_{l,ij} \le e^{(m)}_{jj}$

ולכן אם $\delta < 1/2$ הוא הפיך ב- $e^{(m)}_{jj} B e^{(m)}_{jj}$.

לכן יש לו פירוק פולארי.

נסמן ב- $g^{(m)}_{l,ij}$ את האיזומטריה החלקית בפירוק הפולארי:

$$g^{(m)}_{l,ij} = y^{(m)}_{l,ij}\left(y^{(m)*}_{l,ij} y^{(m)}_{l,ij}\right)^{-1/2}$$

הפיך ב $e^{(m)}_{jj} B e^{(m)}_{jj}$

נגדיר $u = \sum_m \sum_{j=1}^{n_m} g^{(m)*}_{l,ij} e^{(m)}_{l,ij}$

אז כמו קודם:

א) u אוניטרי.

ב) לכל m,i,j: $u e^{(m)}_{l,ij} = g^{(m)}_{l,ij} u$

ג) לכל ε יש δ כך ש- $\|u-1\| < (\text{תלוי במימד}) \cdot \varepsilon$

כנדרש.