בפעם שעברה: לכל $\delta>0$ ולכל $n\in\mathbb{N}$ קיים $\varepsilon>0$

כך שלכל $A,B\subseteq D$ אלגבראות C^*

כך של- D יש יחידה ו- $\dim(A)\le n$, $\dim$

אם $e^{(m)}_{kl}$ יחידות מטריציאליות

של A ו- $\operatorname{dist}(e^{(m)}_{kl}, B) < \delta$

לכל m,l,k אז קיים אוניטרי

$u\in D$ כך ש- $\|u-1\|<\varepsilon$ ו- $uAu^*\subseteq B$.

למה: אם בלמה הקודמת אנו מניחים

שיש גם כן יש תת-אלגברה C^*

$C\subseteq A\cap B$ (סוף מימדית) אז אפשר

לבחור את $u\in C'$.

הערה: נתון האוניטרי u בלמה

הקודמת. מאמר ש- $\|u-1\|<\varepsilon$

אז לכל v אוניטרי ב- D,

$$\|uv-vu\|<2\varepsilon$$
$$\|u-vuv^*\|$$

נסמן ב- $\mathcal{U}(C)$ - החבורה

האוניטרית של C.

אם $C=M_{n_1}\oplus M_{n_2}\oplus\cdots\oplus M_{n_k}$

$$\mathcal{U}(C)=\mathcal{U}(n_1)\times\mathcal{U}(n_2)\times\cdots\mathcal{U}(n_k)$$

נגדיר $x=\int_{\mathcal{U}(C)} vuv^*\,dv$

מידת האר על $\mathcal{U}(C)$

נשים לב ש- $Span(\mathcal{U}(C)) = C$

לכן $\mathcal{U}(C)' = C'$

לכן כדי לבדוק ש- $x \in C'$ מספיק

לבדוק ש- x מתחלף עם כל אוניטרי.

ואכן, אם $w \in \mathcal{U}(C)$ אז

$$wx = \int_{\mathcal{U}(C)} w v u v^* \, dv = \int_{\mathcal{U}(C)} z u z^* w \, dz = xw$$

$z = wv$

$w^* z = v$

$dv = dz$

x לאו דווקא אוניטרי, אבל $\|x-1\| < \varepsilon$

כי $\|vuv^* - 1\| < \varepsilon$ לכל v אוניטרי.

אז אם $\varepsilon < 1$, x הפיך.

מאחר שגם x^* בקומוטנט,

נובע שגם w החלק האוניטרי בפירוק

הפולארי של x אבל גם $w \in C'$.

$$w = x \cdot (x^* x)^{-1/2}$$

אז $\|w-1\| \le \|w-x\| + \|x-1\|$

$$< \underbrace{\|1 - (x^*x)^{-1/2}\|}_{\le 1 - \frac{1}{\sqrt{1-2\varepsilon}}} + \varepsilon$$

נותר לבדוק ש- $wAw^* \subseteq B$.

לכל $a \in A$

$$xax^* = \iint_{\mathcal{U}(C) \times \mathcal{U}(C)} v u v^* a z u^* z^* \, dv \, dz$$

$v^* a w \in A$ לכל $v, w^* \in C$ (כי $C \subseteq A$)

$\Leftarrow u v^* a w u^* \in B$ ומכאן גם $v, w^* \in B$ (כי $C \subseteq B$),

קיבלנו שהאינטגרנד ב-B

אז $waw^* = x(x^*x)^{-1/2}a(x^*x)^{-1/2}x^*$

ולכן לבדוק ש- $waw^* \in B$

נשאר לבדוק רק.

משפט (אפיון מקומי של אלגבראות AF): אלגברה ספרבילית A היא אלגברת AF אם ורק אם לכל $F \subseteq A$ קבוצה סופית ולכל $\varepsilon>0$ קיימת תת-אלגברה סוף-ממדית $B \subseteq A$ כך שלכל $x \in F$, $dist(x,B)<\varepsilon$.

יתר על כן, אם $C \subseteq A$ תת-אלגברה* סוף ממדית אפשר לבחור את B כך ש- $C \subseteq B$.

הערה: בהגדרה בלי ספרביליות האפיון לא שקול.

הוכחה: אם A אלגברת AF אז ברור שהתנאי מתקיים, פרט ל"יתר על כן".

לגבי היתר על כן, בהינתן C קיים δ כך שאם אוסף יחידות מטריציוניות של C נמצא במרחק פחות מ-δ מ-B אז יש אוניטרי u כך ש- $\|u-1\|<\varepsilon/3$ ו- $uCu^* \subseteq B$.

אז בהינתן F כנ"ל, נמצא B כך ש- $dist(x,B)<\varepsilon/3$ לכל $x \in F$ וכן המרחק של יחידות מטריציוניות של C מ-B קטן מ-δ. נמצא u כנ"ל, ואז אם נחליף את B ב- u^*Bu אז $u^*Bu \supseteq C$, ו- $dist(x,u^*Bu)<\varepsilon$ לכל $x \in F$.

<u>כיוון שני:</u> נניח ש-

$F_1 \subseteq F_2 \subseteq \cdots$

סדרה עולה של קבוצות סופיות שהאיחוד שלהן צפוף בכדור היחידה.

נגדיר אלגבראות סוף ממדיות B_n אינדוקטיבית: נבחר B_1 כך ש- $dist(x,B_1)<1$ לכל $x\in F_1$.

נניח שבחרנו את B_n כך ש-

$B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots \subseteq B_n$

ולכל $x\in F_n$; $dist(x,B_n)<1/n$

נבחר $\tilde{B}_{n+1}$ סוף ממדית כך ש-

$$dist(x,\tilde{B}_{n+1}) < \frac{1}{3(n+1)}$$

לכל $x\in F_{n+1}$ וכן $dist(x,\tilde{B}_{n+1})<\delta$ לכל x במערכת יחידות מטריציאליות של B_n

כאשר δ נבחר כך שיש אוניטרי u כך ש- $\|u-1\|<\frac{1}{3(n+1)}$

ו- $uB_nu^* \subseteq \tilde{B}_{n+1}$

אז נגדיר $B_{n+1}=u^*\tilde{B}_{n+1}u$

אז קיבלנו $A=\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n}$

כאשר האיחוד עולה.

<u>משפט:</u> נניח ש- A אלגברת AF, ונניח ש-

$$A=\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}=\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n}$$

איחודים עולים של אלגבראות סוף ממדיות.

אז לכל $\varepsilon>0$ קיים אוניטרי $w\in U(A^+)$ כך ש- $\|w-1\|<\varepsilon$ ו- $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = w\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n w^*$.

בנוסף, קיימת סדרה עולה

$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$

$m_1 < m_2 < \dots$

כך ש- $A_{n_k} \subseteq W B_{m_k} W^* \subseteq A_{n_{k+1}}$

לפני שנוכיח את המשפט, נציין מסקנות:

1) אפשר להגדיר פעולות על דיאגרמות ברטלי שלא משנות את האלגברה:

- כיווץ של מספר שלבים לשלב אחד.
- הוספה של שלבים בינוניים.

אם כן, אנו מקבלים שאם דיאגרמות ברטלי מגדירות את אותה אלגברת AF אז אפשר לעבור מאחת לשניה באמצעות הפעולות הנ"ל.

אם נגדיר יחס שקילות על דיאגרמות ברטלי כיחס השקילות הקטן ביותר שסגור תחת הפעולות הללו, אז אנו מקבלים שאלגבראות AF מסווגות על ידי דיאגרמות ברטלי עד כדי שקילות.

2) אלגברת UHF (uniformly hyperfinite)

היא אלגברת AF עם יחידה שהיא איחוד עולה של M_{n_k} עבור

$n_1 \leq n_2 \leq \dots$

$(n_1 \mid n_2 \mid n_3 \dots)$

כלומר דיאגרמת ברטלי היא מהצורה

$n_1 \xrightarrow{n_2/n_1} n_2 \xrightarrow{n_3/n_2} n_3 \to \dots$

אלגברת CAR מתאימה ל-

$1 \xrightarrow{2} 2 \xrightarrow{2} 4 \xrightarrow{2} 8 \xrightarrow{2} \dots$

אם כן, לכל סדרה

$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$

אפשר להגדיר את המספר העל-טבעי המתאים

Supernatural number

שהוא פירוק ראשוני של הסדרה:

ביטוי פורמאלי מהצורה

$p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3} \cdots$

כאשר $p_1, p_2, \ldots$

הם המספרים הראשוניים ו-

$k_n \in \{0,1,2,\ldots\} \cup \{\infty\}$.

אם כן, המספר העל-טבעי של אלגברה

UHF A הוא אינווריאנטה והם

ממיינים את אלגבראות UHF עד כדי

איזומורפיזם. (משפט של Glimm).

(לפעמים אלגבראות UHF נקראות אלגבראות Glimm).