ראינו שלכל $\varepsilon>0$ ולכל $n\in\mathbb{N}$ קיים $\delta>0$
כך שלכל $A,B\subseteq D$ אלגבראות C^*
כך ש-D עם יחידה, $\dim(A)\le n$
ויש $\{e_{ij}^{(l)}\}$ יחידות מטריציאליות של A
מקיימות $\operatorname{dist}(e_{ij}^{(l)},B)<\delta$
לכל i,j,l קיים אוניטרי
$u\in D$ כך ש-$\|u-1\|<\varepsilon$
ו-$uAu^*\subseteq B$.

<u>תוספת:</u> נניח שבנוסף $C\subseteq A\cap B$
אלגברת C^* אז אפשר לבחור את u
להיות בקומוטנט של C.

<u>הוכחת התוספת:</u> נניח שמצאנו u כמקודם
ואנחנו רוצים לתקן אותו כדי שיהיה
בקומוטנט. אפשר להניח בלי הגבלת
הכלליות ש-$C\subseteq A$, $1\in C$.
נניח ש-$f_{kl}^{(m)}$ יחידות מטריציאליות
של C. נסמן

$$w=\sum_m\sum_{k=1}^{n_m} u f_{1k}^{(m)*} u^* f_{1k}^{(m)}$$

אז w אוניטרי, $\|w-1\|<2\varepsilon$
ואם נגדיר $v=w^*u$
אז $v\in C'$, $\|v-1\|<3\varepsilon$
ו-$vAv^*\subseteq B$.

<u>נבדוק!</u>

$$w^*w=\sum_{m,l}\sum_{k,j} f_{1j}^{(l)*}u\underbrace{f_{1j}^{(l)}\cancel{u^*u}f_{1k}^{(m)*}}_{\delta_{jk}\delta_{lm}f_{11}^{(m)}}u^*f_{1k}^{(m)}=\sum_m\sum_k f_{1k}^{(m)*}uf_{11}^{(m)}u^*f_{1k}^{(m)}$$

משפט: נניח ש- $A = \overline{\cup A_n} = \overline{\cup B_n}$

איחוד עולה של אלגבראות סוף ממדיות. אז לכל ε קיים $w \in \mathcal{U}(A)$ כך ש- $\|w-1\|<\varepsilon$

ו- $w \overline{\cup A_n} w^* = \overline{\cup B_n}$.

הוכחה: נבחר סדרה ε_n כך ש- $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\varepsilon_n)^2 < 1+\varepsilon$.

נבחר n_1 ו- u_1 אוניטרי כך ש- $u_1 A_1 u_1^* \subseteq B_{n_1}$

ו- $\|u_1-1\|<\varepsilon_1$.

נמצא m_2 כך ש- A_{m_2} מכיל מערכת יחידות מטריציאליות של $u_1^* B_{n_1} u_1$

(עד כדי δ מספיק קטן) כך שקיים

אוניטרי v_1 כך ש- $\|v_1-1\|<\varepsilon_1$

ו- $v_1 u_1^* B_{n_1} u_1 v_1^* \subseteq A_{m_2}$

נשים לב ש- $A_1 \subseteq u_1^* B_{n_1} u_1$

מהלמה הקודמת, ניתן היה לבחור את v_1 בקומוטנט של A_1.

בשלב ה-k יש לנו אוניטריים

$u_1,\dots,u_k$, $v_1,\dots,v_k$

ואינדקסים $n_1<n_2<\dots<n_k$

$m_1<m_2<\dots<m_{k+1}$

כך ש- $\|u_j-1\|<\varepsilon_j$, $\|v_j-1\|<\varepsilon_j$

לכל j,

$$A_{m_j} \subseteq \underbrace{v_j u_j^* v_{j-1} u_{j-1}^* \cdots v_1 u_1^* B_{n_j} u_1 v_1^* \cdots u_j v_j^*}_{C_j} \subseteq A_{m_{j+1}}$$

כך ש- $v_j \in A_{m_j}'$, $u_j \in C_j'$.

נגדיר $w = \lim_{j\to\infty} \overbrace{v_j u_j^* \cdots v_1 u_1^*}^{=w_j}$

הגבול קיים כי

$$\| v_j u_j^* \cdots v_1 u_1^* - v_{j+1} u_{j+1}^* v_j u_j^* \cdots v_1 u_1^* \|$$

$$= \| 1 - v_{j+1} u_{j+1}^* \| \le \|1 - v_{j+1}\| + \|1 - u_{j+1}\|$$

$$\le 2\varepsilon_j$$

אז כיוון ש $\sum \varepsilon_j < \infty$ זו סדרת קושי.

כמו כן, $w w_k^* \in C_k'$ לכל k.

לכן:

$$w B_{n_k} w^* = w w_k^* \underbrace{w_k B_{n_k} w_k^*}_{=C_k} w_k w^* =$$

$$= w w_k^* C_k w_k w^* = C_k \subseteq A_{m_{k+1}}$$

ו- $\|w - 1\| < \varepsilon$ - מההגדרה הקודמת.

✓

איזומורפיזם ומנה של אלגברות AF

<u>מסקנה:</u> מנה של אלגברת AF היא אלגברת AF.
(מיידי)

<u>הערה:</u> תת-אלגברה של אלגברת AF היא לאו דווקא אלגברת AF.

<u>דוגמה:</u> נסמן $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ - קבוצת קנטור, נסמן $x \in X$ כסדרה $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

נגדיר $h: X \to [0,1]$ ע"י $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$.

אז h רציפה ועל.

אז אנחנו מקבלים שיכון $\iota: C[0,1] \to C(X)$

$$\iota(f)(x) = f(h(x))$$

$C(X)$ היא אלגברת AF ואילו $C([0,1])$ אינה אלגברת AF.
(כדי שאלגברת C^* קומוטטיבית תהיה אלגברת AF, בפרט האיברים עם ספקטרום סופי צריכים להיות צפופים ואילו ב- $C([0,1])$ האיברים היחידים עם ספקטרום סופי הם כפולות של I).

<u>הערה:</u> השתמשנו פה רק בעובדה ש- $[0,1]$ הוא מנה של קבוצת קנטור.

<u>תרגיל:</u> כל מרחב מטרי קומפקטי הוא מנה של קבוצת קנטור.

<u>למה:</u> נניח ש $A = \overline{\bigcup A_n}$ איחוד עולה של תת-אלגבראות C^* (לאו דווקא סוף מימדיות) ונניח ש- $J \triangleleft A$. אז $J = \overline{\bigcup J \cap A_n}$.

בפרט, אם A היא אלגברת AF אז גם J אלגברת AF.

<u>הוכחה:</u> נתבונן בדיאגרמה:

$$\begin{tikzcd} J\cap A_n \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\iota"] & A_n \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\iota"] & A_n/J\cap A_n \arrow[d, "\alpha"] \\ J \arrow[r, "\iota"] & A_n+J \arrow[r, "\pi"] & A_n+J/J \end{tikzcd}$$

ראינו שקיים איזומורפיזם α כך שהדיאגרמה מתחלפת. לכן, לכל n ולכל $a \in A_n$,
$$\mathrm{dist}(a, A_n \cap J) = \mathrm{dist}(a, J)$$

לכן אם $a \in J$ אז $a_n \in A_n \cap J$

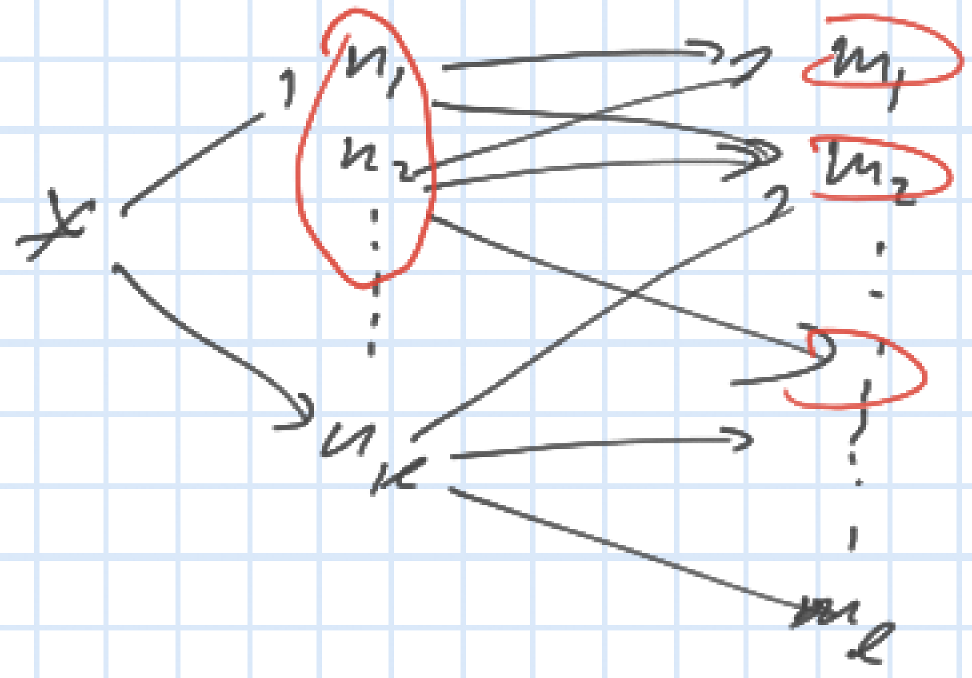
כי $a_n \to a$ $\Leftarrow$ $J = \overline{\bigcup A_n \cap J}$

נשים לב שאידיאל ה- $M_{n_1} \oplus M_{n_2} \oplus \dots \oplus M_{n_k}$

הוא בעצם סכום ישר של חלק מהמחוברים

(עם אפסים בשאר הקואורדינטות).

אפשר לראות את זה בדיאגרמה כאלי:



הדיאגרמה שמתאימה לאידיאל תקיים את

התנאים הבאים:

א) אם v קודקוד בדיאגרמה של האידיאל וי $v \to v_2$ מופיע בדיאגרמה של A אז גם v_2 בדיאגרמה של האידיאל. קבוצה מכוונת

ב) אם $w_1, \dots, w_k$ בשלב מסוים של הדיאגרמה של J, ו-v בשלב הקודם וכל הקודקודים שיוצאים מ-v הם לתוך $\{w_1, \dots, w_k\}$ אז גם v בדיאגרמה של J. קבוצה רוויה

אם כן, יש התאמה חד-חד ערכית בין אידיאלים לבין קבוצות מכוונות ורוויות בדיאגרמה כזאלי. (להוכיח שזה נכון - תרגיל).

תרגיל: האידאלים שמתאימים ל- A/J מתקבלים מכך שמתקיים את יחסי האידאלים שמתאימים לאידאל.

הערה: אם A אלגברת AF לא יוניטלית אז גם $\tilde{A}$ אלגברת AF. (תרגיל).

למה: נניח ש- A אלגברת AF ו- $p\in A$ הטלה, אז pAp אלגברת AF. (תרגיל).

למה: תהי A אלגברת AF, אז ל- A יש קירוב יחידה שמורכב מהטלות.

הוכחה: נניח ש- $A=\bigcup A_n$ סדרה עולה. נסמן $p_n=1_{A_n}$ אז p_n הוא קירוב יחידה.

הרחבות

נניח שנתונה סדרה מדויקת

$$0\to J\xrightarrow{\iota} A\xrightarrow{\pi} A/J\to 0$$

(כלומר J אידאל ב- A, זו המשמעות).

נרצה להראות שאם J ו- A/J הן אלגבראות AF אז גם A אלגברת AF. דרוש קצת הכנה.

הערה: במובן כללי, אם A אלגברת C^* ו- $A \triangleright J$ ו- $p \in A/J$ הטלה, ייתכן שאין הטלה $q \in A$ כך ש- $\pi(q) = p$.

דוגמה:

$A = C[0,1]$

$J = C_0((0,1))$

$A/J = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} = C(\{0,1\})$

נסמן $p \in A/J$ ע"י

$p(0) = 0$

$p(1) = 1$

אם $\pi(f) = p$ אז $f \in C[0,1]$ מתקיים $f(0)=0$, $f(1)=1$.

הטלה היא פונקציה שמקבלת רק את הערכים $0,1$, אבל f אינה הטלה כי $[0,1]$ קשיר.

למה (הרמה של הטלות):

נניח ש- $J \triangleleft A$, ונניח כי J ו- A/J הן אלגבראות AF.

$\pi : A \to A/J$ העתקת המנה.

לכל הטלה $p \in A/J$ קיימת הטלה $q \in A$ כך ש- $\pi(q) = p$.

אז $\pi(u)=e^{2\pi i p}=1$

$\Leftarrow$ $u-1\in J$.

<u>הוכחה:</u> נניח $x\in A$ כך ש- $\pi(x)=p$.

אפשר להניח בלי הגבלת הכלליות

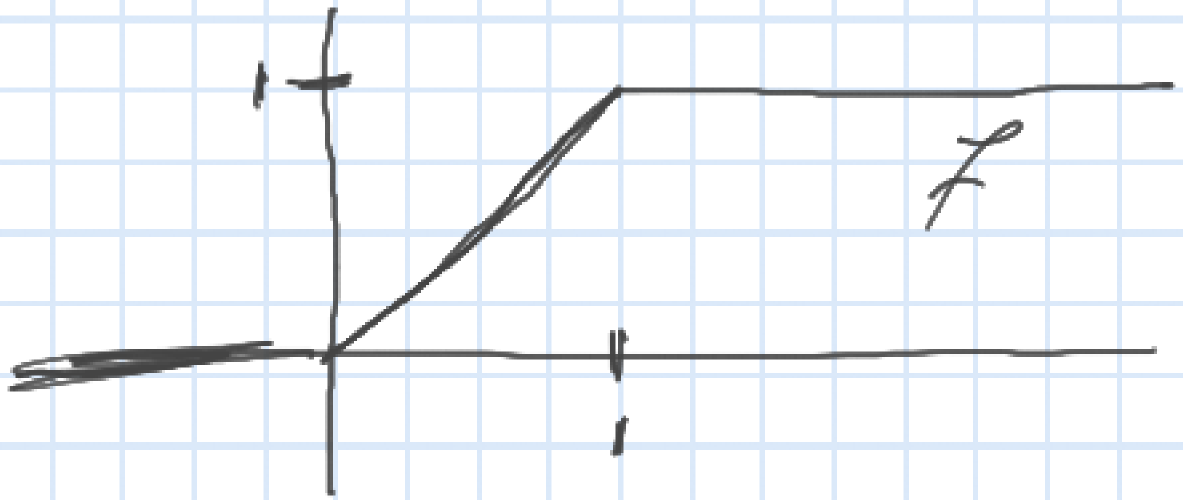
ש- $x=x^*$ (אחרת נחליף אותו

ב- $\frac{1}{2}(x+x^*)$) ואפשר להניח ש-

$0\le x\le 1$

אחרת נחליף אותו ב- $f(x)$

כאשר



אפשר להניח בלי הגבלת הכלליות של-A

יש יחידה. נתבונן ב- $u=e^{2\pi i x}$

של u אוניטרי.