<u>למה:</u> נניח $J \trianglelefteq A$ ושבנוסף ש-J היא אלגברת AF.

נסמן $\pi : A \to A/J$.

נניח ש-$p \in A/J$ הטלה. אז קיימת הטלה $q \in A$ כך ש-$\pi(q) = p$.

<u>הוכחה:</u> נניח, ללא הגבלת הכלליות ש-A יש יחידה.

נבחר $x \in A$ כך ש-$0 \le x \le 1$ וגם $\pi(x) = p$.

נגדיר $u = e^{2\pi i x}$.

אז u אוניטרי, וגם $\pi(u) = e^{2\pi i \pi(x)} = e^{2\pi i p} = 1$

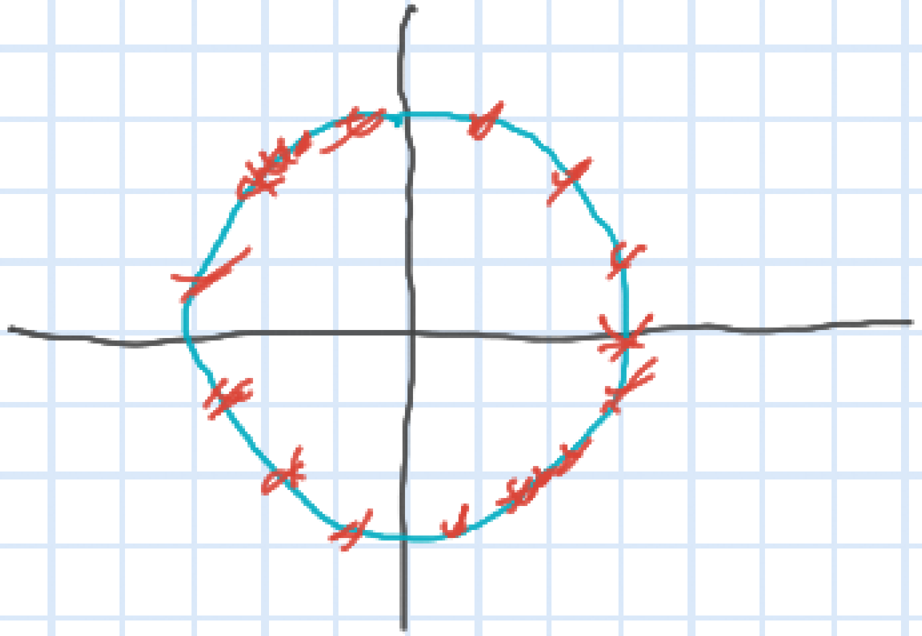
לכן $u - 1 \in J$.

מאחר ש-J^+ היא אלגברת AF מהתרגול קיים אוניטרי $w \in U(J^+)$ כך ש-$\|w-u\| < \delta$ וגם w יש ספקטרום סופי. נשים לב ש-$\pi(w) \in \mathbb{C}1$.

נסמן $\lambda = \pi(w)$, אז $|1-\lambda| < \delta$,

ולכן $\pi(w\bar{\lambda}) = 1$ וגם $\|u - w\bar{\lambda}\| < 2\delta$.

אם כן, ע"י כך שנחליף את δ ב-$\delta/2$ במקרה הצורך, אפשר להניח שבחרנו את w כך ש-$\pi(w) = 1$.



אם כן, קיים $a \in J^+$ כך ש $\sigma \geq a$,

ו-$\|a\|<1$ כך ש $w = e^{2\pi i a}$,

ו- $\sigma(a)$ סגר.

ובנוסף $\pi(w)=\pi$ $\Leftarrow$ $\pi(a)$ היא הטלה,

מוכרח ש- $\|\pi(a)\|<1$ מכאן ש $\pi(a)=0$,

לכן $a \in J$,

תהי $e = \chi_{(\frac{1}{3},\frac{2}{3})}(a)$

זו הטלה ב-J. נסמן $e^\perp = 1-e$

נסמן $y = e^\perp x e^\perp$.

<u>טענה:</u> עבור סגל קטן מספיק, $\sigma(y) \not\ni \frac{1}{2}$.

בהנתן הטענה, נשים לב ש $\pi(y)=\pi(x)=p$

ואז $\chi_{[0,\frac{1}{2}]}$ רציפה על $\sigma(y)$,

נגדיר $q = \chi_{(\frac{1}{2},1]}(y)$ אז q

הטלה, ו- $\pi(q)=p$.

נותר להוכיח את הטענה:

נסמן $f,g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$

ע"י $f(e^{2\pi i t}) = t-t^2$

$g(e^{2\pi i t}) = t^2-t^3$ $\quad (t\in[0,1))$

אז f,g רציפות (מוגדרות היטב כי מקבלות אותו ערך עבור $t=0,1$).

לכן, לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל

u,v אוניטריים כך ש $\|u-v\|<\delta$

מתקיים ש $\|f(u)-f(v)\|<\varepsilon$

$\|g(u)-g(v)\|<\varepsilon$

אם נפעיל את זה על w,u כמתואר,

אז $f(u)=x-x^2$, $f(w)=a-a^2$

אז בהנתן δ,ε כנ"ל, מתקיים

$\|x-x^2-(a-a^2)\|<\varepsilon$

$\|x^2-x^3-(a^2-a^3)\|<\varepsilon$

אם כן,

$\|e^{\perp}x^2e^{\perp} - y^2\| \le$

$\le \frac{9}{2}\|e^{\perp}(x-a)(a-a^2)(x-a)e^{\perp}\|$

$\le \frac{9}{2}\|(x-a)(a-a^2)\|\,\|x-a\|$

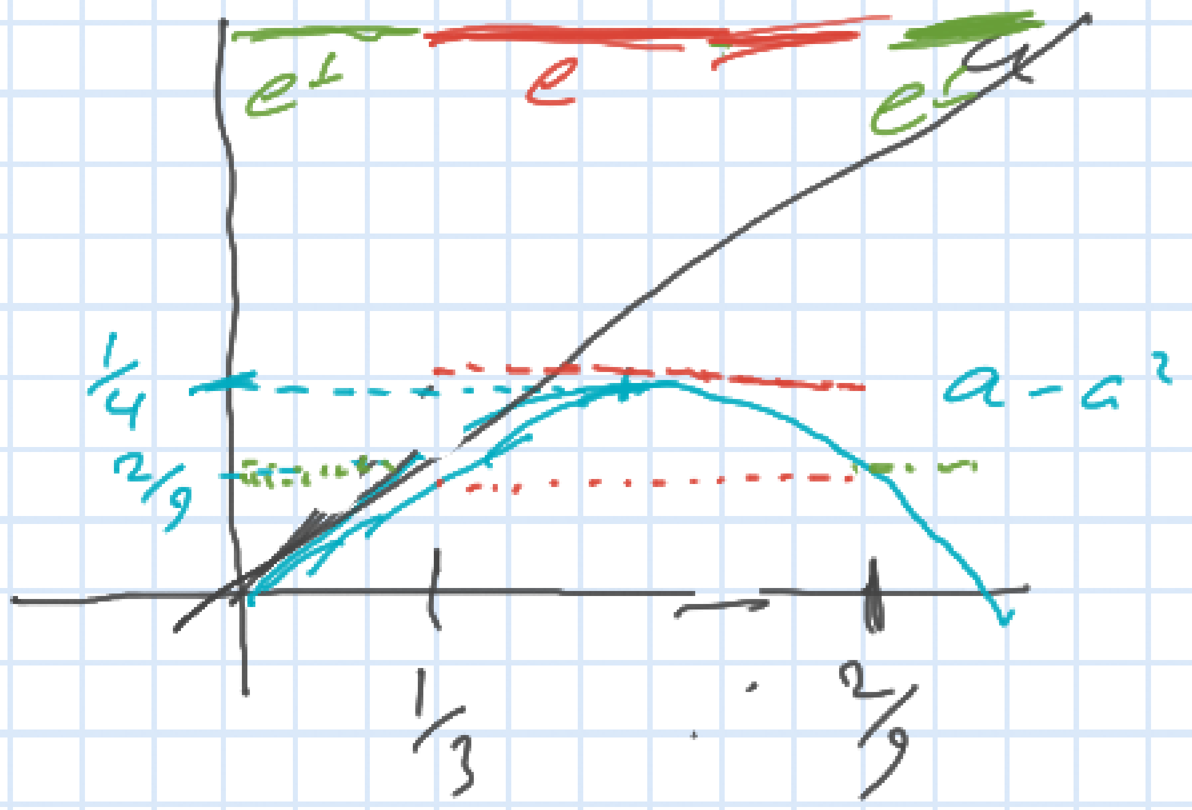
$= \frac{9}{2}\|x(a-a^2)-(a^2-a^3)\|\,\|x-a\|$

$= \frac{9}{2}\|x((a-a^2)-(x-x^2)) +$

$+(x^2-x^3)-(a^2-a^3)\|\cdot\|x-a\|$

$\le \frac{9}{2}\Big(\underbrace{\|x\|}_{\le 1}\cdot\underbrace{\|(a-a^2-(x-x^2))\|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\|x^2-x^3-(a^2-a^3)\|}_{<\varepsilon}\Big)\cdot\underbrace{\|x-a\|}_{\le 2}$

$\le 18\varepsilon$



נשים לב ש- $\frac{2}{9}e \le a-a^2 \le \frac{1}{4}e+\frac{2}{9}e^{\perp}$

$e^{\perp}x^2e^{\perp} - y^2 = e^{\perp}x^2e^{\perp} - e^{\perp}xe^{\perp}xe^{\perp}$

$= e^{\perp}xexe^{\perp} =$

$= e^{\perp}(x-a)e(x-a)e^{\perp}$

$\le \frac{9}{2}e^{\perp}(x-a)(a-a^2)(x-a)e^{\perp}$

$e^{\perp}ae =$
$= eae^{\perp} = 0$

כי $ae = ae$

$ee^{\perp} = 0$!

אז $\|y-y^2\| =$

$$= \|e^{\perp}xe^{\perp} - y^2\| =$$

$$= \|e^{\perp}(x-x^2)e^{\perp} + e^{\perp}x^2e^{\perp} - y^2\| =$$

$$= \|e^{\perp}((x-x^2)-(a-a^2))e^{\perp} +$$

$$+ e^{\perp}(a-a^2)e^{\perp} + e^{\perp}x^2e^{\perp} - y^2\|$$

$$\le \|e^{\perp}((x-x^2)-(a-a^2))e^{\perp}\| +$$

$$+ \|e^{\perp}(a-a^2)e^{\perp}\| + \|e^{\perp}x^2e^{\perp} - y^2\|$$

$$\le \varepsilon + \frac{2}{9} + 18\varepsilon = \frac{2}{9} + 19\varepsilon$$

אם נבחר ε קטן כך ש- $\frac{2}{9} + 19\varepsilon < \frac{1}{4}$

ונקבל סתירה להנחה על p בטענה קודמת,

וסיימנו.

הערה: התכונה המיוחדת של J שהשתמשנו בה היא שכל אוניטרי ב- J^+ ניתן לקירוב על ידי אוניטריים עם ספקטרום סופי.

למה: נניח ש- $J \triangleleft A$,

J היא אלגברה AF ו- $C \subseteq A/J$

אלגברה ממימד סופי.

אז קיים $\rho: C \to A$

הומומורפיזם כך ש- $\pi \circ \rho = id_C$

הוכחה: נכתוב

$$C = M_{n_1} \oplus M_{n_2} \oplus \cdots \oplus M_{n_k}$$

נסמן $p_j = 1_{M_{n_j}}$

אז אלה הטלות ניצבות ו- $p_1 + \cdots + p_k = 1_C$.

נשים לב שניתן למצוא $q_1, \dots, q_k \in A$

הטלות ניצבות כך ש- $\pi(q_j) = p_j$

לכל $j = 1, \dots, k$.

מדוע?

נמצא $g_1 \in A$ הפיך כך ש- $\pi(g_1) = p_1$.

נשים לב ש- $g_1^{-1} A g_1 \triangleleft g_1^{-1} J g_1$

ו- $g_1^{-1} J g_1$ אלגברת AF,

ואז נמשיך באינדוקציה.

אם כן, מאחר שמספיק למצוא הרמה ל- M_n בתוך $g_j A g_j$,

אפשר להניח בלי הגבלת הכלליות ש- $C = M_n$.

נניח ש- e_{kk} הן יחידות מטריציאליות עבור M_n. נמצא הרמות ניצבות $f_1, \ldots, f_n \in A$

כך ש- $\pi(f_k) = e_{kk}$

עבור $k = 1, 2, \ldots, n$.

נבחר v_{k1} כך ש- $\|v_{k1}\| \le 1$

ו- $\pi(v_{k1}) = e_{k1}$.

(<u>הערה:</u> אם $x \in A/J$ שמקיים $\|x\| \le 1$ אז קיים $y \in A$ כך ש- $\|y\| \le 1$

ו- $\pi(y) = x$.

אם $x^* = x$ - הטיעון שלנו.

אחרת, נתבונן ב- $\begin{pmatrix} 0 & x \\ x^* & 0 \end{pmatrix} \in M_2(A/J)$

נשים לב ש- $M_2(J) \triangleleft M_2(A)$

נרים אותו ל- $\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$

כך ש- $\left\| \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \right\| \le 1$

נקבל $\|y_{12}\| \le 1$ ו- $\pi(y_{12}) = x$)

נסמן $z_j = f_1 v_j^* f_j v_j f_1$

אז לכל j: $\pi(z_j) = e_{11}$

נשים לב של J יש קירוב יחידה שמורכב מהטלות, ובכלל גם ל- $f_1 J f_1$ יש קירוב יחידה כזה.

נבחר הטלה $p \in f_1 J f_1$

כך ש- $\|(f_1 - p)\underbrace{(z_j - f_1)}_{\in f_1 J f_1}(f_1 - p)\| < 1/3$

אם כן, $f_1 - p$ הטלה. נסמן $f_1' = f_1 - p$.

נגדיר $z_j' = f_1' z_j f_1'$.

אז $\|z_j' - f_1'\| < 1/3$

נתבונן ב- $b_j = f_j v_j f_1'$

$$z_j' = b_j^* b_j$$

אז z_j' הפיך כאיבר ב- $f_1' A f_1'$.

נסמן $c_j = b_j \underbrace{(z_j')^{-1/2}}$

היפוכי בתוך תת-האלגברה

נגדיר $f_j' = c_j c_j^*$

ובאופן כללי יותר, נגדיר

$$c_{jk} = c_j c_k^*$$

טענה: אלה יחידות מטריציוניות שעולות על:

$$\pi(c_{jk}) = e_{jk}$$

הוכחת הלמה: ראשית:

כדי לברר ש- $\pi(c_{ij}) = e_{ij}$

מספיק לברר ש- $\pi(c_j) = e_{j1}$

לכל j, ואכן

$$\pi(c_j) = \pi(b_j)\pi\left((b_j^* b_j)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

עכשיו:

$$\pi(b_j) = \pi(f_j)\pi(v_j)\pi(f_1) = e_{jj} e_{j1} e_{11} = e_{j1}$$

לכן

$$\pi(b_j^* b_j) = e_{11}$$

ולכן גם,

$$\pi\Big(\underbrace{(b_j^* b_j)^{-\frac{1}{2}}}_{\text{בתוך } f_1 A f_1}\Big) = e_{11}$$

כדי לברר שאלה יחידות מטריציאליות, צריך לברר: א) $c_{ij}^* = c_{ji}$ — מיידי.

ב) $c_{jk} c_{lm} = \delta_{kl} c_{jm}$.

$$c_{jk} c_{lm} = c_j c_k^* c_l c_m^*$$

אבל:

$$c_k^* c_l = (b_k^* b_k)^{-\frac{1}{2}} b_k^* b_l (b_l^* b_l)^{-\frac{1}{2}}$$

$$b_k^* b_l = f_1 v_k^* f_k f_l v_l f_1 = \delta_{kl} b_k^* b_k$$

אז אם $k=l$, אנחנו מקבלים:

$$c_k^* c_l = \delta_{kl} f_1$$

$$c_{jk} c_{lm} = \delta_{kl} c_j f_1 c_m^* = \delta_{kl} c_j c_m^* = \delta_{kl} c_{jm}$$

אז נאלץ ש$\langle C\rangle$ יצריך עותק של M_n
ב- A שמגיע הרמה של C.

<u>הערה!</u> לא היינו צריכים להניח ש J
הוא AF. הטכניקה עובדת
שבמקרה כזה הוא ש- J יש
קירוב יחידה שמורכב מהטלות,
וכן שמותר להרים הטלות ניצבות
להטלות ניצבות (ולצורך זה
משתמשים בכך שניתן לקרב אופרטורים
ב- J^+ על ידי ~~אופ~~ אופרטורים עם
ספקטרום סופי).