**משפט:** נניח ש־ $0 \to J \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} A/J \to 0$ סדרה מדויקת של אלגבראות $C^*$.

נניח ש־ $J$ ו־ $A/J$ אלגבראות AF אז $A$ אלגברת AF.

**הוכחה:** נתונים $F \subseteq A$ סופית ו־ $\varepsilon > 0$.

אנחנו רוצים למצוא תת-אלגברה סוף-מימדית של $A$ שהמרחק של כל איברי $F$ ממנה קטן מ־ $\varepsilon$.

נמצא $B_0 \subseteq A/J$ סוף-מימדית כך ש־ $\mathrm{dist}(\pi(x), B_0) < \varepsilon/3$ לכל $x \in F$.

מלמה מההרצאה הקודמת, קיים $\rho: B_0 \to A$ הומומורפיזם כך ש $\pi \circ \rho = \mathrm{id}_{B_0}$.

אם $F = \{a_1, \dots, a_m\}$

אז יש $\{b_1, \dots, b_m\} \subseteq B_0$

כך ש־ $\|\pi(a_k) - b_k\| < \varepsilon/3$ לכל $k$.

ולכן יש $c_1, \dots, c_m \in J$

כך ש־ $\|a_k - \rho(b_k) - c_k\| < \varepsilon/3$

לכל $k$.

נסמן $d_k = \rho(b_k) + c_k$ $(k=1,\dots,m)$

נסמן $A_0 = \rho(B_0)$

**טענה:** קיים קירוב יחידה של $J$ שמורכב מאיברים שמתחלפים עם $A_0$.

נראה קודם איך מסיימים את הוכחת המשפט בהינתן הטענה.

נניח ש־ $h_\lambda$ קירוב יחידה של $J$ שמורכב מאיברים כנ"ל.

נניח ש- $a\in A_0$, $c\in J$ אז

$$a+c = f_n(a+c)+(1-f_n)(a+c)$$

בנוסף:

$$f_n(a+c)f_n + (1-f_n)(a+c)(1-f_n) =$$

$$= \overbrace{f_n a f_n}^{f_n a =} + \overbrace{f_n c f_n}^{\to c} +$$

$$+\underbrace{(1-f_n)a(1-f_n)}_{=(1-f_n)a} + \underbrace{(1-f_n)c(1-f_n)}_{\to 0}$$

אז: $f_n(a+c)f_n + (1-f_n)(a+c)(1-f_n) \longrightarrow a+c$

וכן $f_n(a+c)f_n + (1-f_n)a(1-f_n) \longrightarrow a+c$

מאחר ש- $1-f_n\in A_0'$, נקבל ש-

אז $(1-f_n)A_0(1-f_n)$

הינה אלגברה סוף ממדית.

אם כן נמצא $n$ כך ש

$$\|a_k - (f_n a_k f_n + (1-f_n)\rho(b_k)(1-f_n))\| < \varepsilon/3$$

לכל $k=1,\dots,m$.

אז מאחר ש- $f_n a_k f_n \in f_n J f_n$

ו- $f_n J f_n$ הוא AF,

נוכל למצוא תת-אלגברה סוף ממדית

$C \subseteq f_n J f_n$ כך ש

$$\mathrm{dist}(f_n a_k f_n, C) < \varepsilon/3$$

נגדיר $A_1 = (1-f_n)A_0(1-f_n) + C$

זהו סכום ישר של אלגבראות סוף ממדיות, ו- $\mathrm{dist}(a_k, A_1) < \varepsilon$

לכל $k=1,\dots,m$.

נותר להוכיח את הטענה.

נניח ש- $\{e^{(s)}_{ij}\}_{i,j=1,\dots,m_s,\ s=1,\dots,N}$ יחידות מטריצות עבור $A_0$.

לכל $s$, נמצא קירוב יחידה עבור $e^{(s)}_{11} J e^{(s)}_{11}$ שמורכב מהאלה $f^{(s)}_n$.

יהי $g_n$ קירוב יחידה עבור $(1-1_{A_0}) J (1-1_{A_0})$ שמורכב מהאלה.

מס' היחידות בישרים

נגדיר $f_n = g_n + \sum_{s=1}^{N} \sum_{k=1}^{m_s} e^{(s)}_{k1} f^{(s)}_n e^{(s)}_{1k}$

אז אלה. האלה ב-$J$.

נראה שהן כ"א: מספיק לבדוק שהן מתחלפות עם $e^{(s)}_{jl}$ לכל $j,l$.

אז $f_n e^{(s)}_{jl} = e^{(s)}_{j1} f^{(s)}_n e^{(s)}_{1l}$

$e^{(s)}_{jl} f_n = e^{(s)}_{jl} e^{(s)}_{l1} f^{(s)}_n e^{(s)}_{1l} =$

$= e^{(s)}_{j1} f^{(s)}_n e^{(s)}_{1l}$

אם $c \in J$, אנחנו רוצים להראות ש- $f_n c \xrightarrow[n\to\infty]{} c$.

מספיק לבדוק $f_n cc^* \to cc^*$

(כי זה שקול לכך ש- $(1-f_n)cc^* \to 0$ $\Leftarrow$ $(1-f_n)cc^*(1-f_n) \to 0$ $\Leftarrow$ $\|(1-f_n)c\| \to 0$)

נסמן $g = 1 - 1_{A_0}$

ונכתוב $c = (g + \sum\sum e^{(s)}_{kk}) c (g + \sum\sum e^{(r)}_{ll})$

אז מספיק לבדוק $(1-f_n) e^{(s)}_{kk} c e^{(r)}_{ll} \to 0$

(וכנ"ל אם מחליפים אחד מהם ב- $g$.)

נסמן $d = e_{kk}^{(s)} c\, e_{ll}^{(r)}$

אז $dd^* \in e_{kk}^{(s)} J e_{kk}^{(s)}$

$$= \underbrace{e_{kk}^{(s)} c\, e_{ll}^{(r)} c^*}_{\in J} e_{kk}^{(s)}$$

$$f_n dd^* = e_{k1}^{(s)} f_n^{(s)} e_{1k}^{(s)} dd^* =$$

$$= e_{k1}^{(s)} f_n^{(s)} \underbrace{e_{11}^{(s)} e_{1k}^{(s)} dd^* e_{k1}^{(s)} e_{11}^{(s)}}_{\in e_{11}^{(s)} J e_{11}^{(s)}} e_{1k}^{(s)}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} e_{11}^{(s)} e_{1k}^{(s)} dd^* e_{k1}^{(s)} e_{11}^{(s)}$$

(וכנ"ל כאשר אחד משותפים עם $q$)

# תזכורת - $K_0$

תהי $A$ אלגברת $C^*$,

הגדרנו: אומרים שהטלות $p, q$ הן שקולות Murray-von Neumann ומסמנים $p \sim q$ אם קיים $x \in A$ כך ש- $x^*x = p$, $xx^* = q$.

אומרים ש- $p$ שקול אוניטרית ל- $q$ אם יש אוניטרי $u \in A^+$ כך ש- $upu^* = q$.

אומרים ש- $p$ שקול הומוטופית ל- $q$ אם יש מסילה רציפה $\{p_t\}_{t\in[0,1]}$ של הטלות כך ש $p_0 = p$ ; $p_1 = q$.

נסמן את זה כ- $p \underset{u}{\sim} q$, $p \underset{h}{\sim} q$.

**טענה:** אם $q \underset{u}{\sim} p$ אז $q \sim p$.

**הוכחה:** עם $u$ כבהגדרה, נסמן $x = up$

אז $q = xx^*$, $p = x^*x$.

הכיוון השני לא נכון באופן כללי.

למשל, ניקח $A = B(H)$, $H = \ell^2(\mathbb{N})$,

ניקח $p = 1$, $q$ הטלה על תת-מרחב אין-סוף מימדי שבמשלים

ואז, אז $p \sim q$

אבל $u1u^* = 1$ לכל $u$ אוניטרי, כך ש-$p$ לא שקול אוניטרית ל-$q$.

**טענה:** נניח $p, q$ הטלות, $a \in A^*$ הפיך ומקיים $apa^{-1} = q$ אז האוניטרי $u$ בפירוק הפולארי של $a$ מקיים $upu^* = q$.

**הוכחה:** נזכור: $u = a(a^*a)^{-1/2}$.

אם כן, $ap = qa$

$\Rightarrow pa^* = a^*q$

$\Rightarrow a^*ap = pa^*a$

ולכן $f(a^*a)p = pf(a^*a)$ לכל $f \in C(\sigma(a^*a))$

בפרט $(a^*a)^{-1/2}p = p(a^*a)^{-1/2}$.

אז $up = a(a^*a)^{-1/2}p = ap(a^*a)^{-1/2} = qa(a^*a)^{-1/2} = qu$

טענה: אם $\|p-q\|<\frac12$ אז $p\sim_u q$.

הוכחה: נסמן $z = pq + (1-p)(1-q) \in A^1$

אז $\|z-1\| = \|pq + (1-p)(1-q) - 1\| =$

$= \|p(q-p) + (1-p)\underbrace{((1-q)-(1-p))}_{=p-q}\| \le$

$\le 2\|p-q\| < 1$

לכן $z$ הפיך.

עכשיו $zq = pq = pz$

$\Longleftarrow$ מהטענה הקודמת $p\sim_u q$.

מסקנה: אם $p\sim_h q$ אז $p\sim_u q$.

טענה: אם $\|p-q\|<1$ אז $p\sim_h q$,

הוכחה: נסמן $a_t = (1-t)p + tq$

אז $a_t = a_t^*$. כמו כן

אם $t\le\frac12$ אז

$\|a_t - p\| = \|t(p-q)\| < t \le \frac12$

אם $t\ge\frac12$ אז

$\|a_t - q\| < \frac12$

מהאבחנה שלעיל.

אם כן, $\frac12 \notin \sigma(a_t)$

עבור כל $t$.

נגדיר $p_t = \chi_{(\frac12,2]}(a_t)$

אז $p_t$ מסילה רציפה של הטלות, $p_0=p$, $p_1=q$.

<u>טענה:</u> (א) אם $p \sim q$ אז $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{u}{\sim} \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (ב- $M_2(A)^+$)

(ב) אם $p \underset{u}{\sim} q$ אז $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{h}{\sim} \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

<u>הוכחה:</u> (א) יהי $x$ כך ש- $x^*x = p$

$xx^* = q$

נגדיר

$$v = \begin{pmatrix} q & 1-q \\ 1-q & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 1-q \\ 1-p & x^* \end{pmatrix}$$

אז $v$ אוניטרי ב- $M_2(A)^+$

(לבדוק!)

$$v \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v$$

!

(ב) אם $upu^* = q$ אז

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^* & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נמצא מסילה $v_t$ של אוניטריים

ב- $M_2(A)^+$ כך ש:

$$v_0 = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}, \quad v_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נגדיר

$$v_t = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ונבדוק שזה עובד.