למה (קיום ויחידות):

תהי A אלגברת C^* סוף מימדית

ותהי B אלגברת C^* עם יחידה,

שיש לה צמצום של הטלות.

(א) אם $\alpha : K_0(A) \to K_0(B)$

הומומורפיזם חיובי (כלומר הומומורפיזם

של חבורות סדורות למחצה, כלומר

אם $g \geq 0$ ב- $K_0(A)$ אז $\alpha(g) \geq 0$)

כך ש- $\alpha([1_A]) \leq [1_B]$

אז קיים הומומורפיזם

$\varphi : A \to B$

כך ש- $\varphi_* = \alpha$.

אם $\alpha([1_A]) = [1_B]$ אז $\varphi(1_A) = 1_B$.

(ב) אם $\varphi, \psi : A \to B$

הומומורפיזמים כך ש- $\varphi_* = \psi_*$

אז קיים אוניטרי $u \in B$

כך ש- $\varphi = \mathrm{Ad}\, u \circ \psi$.

בינתיים הוכחנו: אם $g_1, \dots, g_n \in K_0(B)$

מקיימים $g_1 + \dots + g_n \leq 1$

אז יש הטלות נצבות $p_1, \dots, p_n \in B$

כך ש- $[p_k] = g_k$ לכל k.

(זה מכסה את המקרה שבו A קומוטטיבית)

אם סוף מימדית ולאו דווקא קומוטטיבית

$$A = M_{n_1} \oplus M_{n_2} \oplus \cdots \oplus M_{n_\ell}$$

נניח ש- $\{e_{jk}^{(r)}\}$

מערכת של יחידות מטריציאליות.

אם כן, ממה שראינו, יש $\{f_{kk}^{(s)}\}_{\substack{k=1,2,\dots,n_s \\ s=1,2,\dots,\ell}}$

האלה ניצבים ב- B כך ש.

$$\Big[\sum_s \sum_k f_{kk}^{(s)}\Big] = \alpha[1_A]$$

ו: $[f_{jj}^{(s)}] = [f_{kk}^{(s)}]$

לכל $k,j \in \{1,\dots,n_s\}$

לכן, מתכונות המודולים, $f_{jj}^{(s)} \sim f_{kk}^{(s)}$

בפרט $f_{11}^{(s)} \sim f_{kk}^{(s)}$

לכל k. לכן יש $f_{1k}^{(s)}$

כך ש $f_{1k}^{(s)} f_{1k}^{(s)*} = f_{11}^{(s)}$

$$f_{1k}^{(s)*} f_{1k}^{(s)} = f_{kk}^{(s)}$$

נגדיר $f_{jk}^{(s)} = f_{1j}^{(s)*} f_{1k}^{(s)}$

אז אלה יחידות מטריציאליות,

ואז יש φ שמוגדרת על ידי

$$\varphi(e_{jk}^{(s)}) = f_{jk}^{(s)}$$

מתרחבת להומומורפיזם

$\varphi: A \to B$

כך ש- $\varphi_* = \alpha$.

אז $\alpha([1_A]) = [1_B]$

אז $\varphi(1) \sim 1$

$\Rightarrow$ $\underbrace{[1-\varphi(1)]}_{\text{הטלה}} = 0$

$\Rightarrow$ מהמודולים, $1-\varphi(1) = 0$

$\Rightarrow$ $\varphi(1) = 1$.

ב) נניח ש- $\varphi_* = \psi_*$.

אז $\varphi(1) \sim \psi(1)$

$1-\varphi(1) \sim 1-\psi(1)$

(נובע מהנתונים של השאלה)

וגם $\varphi(e_{11}^{(s)}) \sim \psi(e_{11}^{(s)})$

לכל $s=1,2,\dots,l$.

אז יש $v_1,\dots,v_l$

כך ש- $v_s^*v_s = \varphi(e_{11}^{(s)})$

$v_sv_s^* = \psi(e_{11}^{(s)})$

ויש w כך ש- $w^*w = 1-\varphi(1)$

$ww^* = 1-\psi(1)$

נגדיר

$$u = w + \sum_{s=1}^{l}\sum_{k=1}^{n_s} \psi(e_{k1}^{(s)}) v_s \varphi(e_{1k}^{(s)})$$

אז

$$u\varphi(e_{ij}^{(s)}) = \psi(e_{ij}^{(s)})u$$

(בדיקה ישירה)

ו- $uu^* = u^*u = 1$

(בדיקה ישירה).

משפט המיון של Elliott לאלגבראות AF עם יחידה:

נניח ש- A,B אלגבראות AF עם יחידה. אז אם

$$(K_0(A), K_0(A)_+, [1_A]) \cong (K_0(B), K_0(B)_+, [1_B])$$

אז $A \cong B$.

ליתר דיוק, אם $\alpha : K_0(A) \longrightarrow K_0(B)$ איזומורפיזם כך ש-

$\alpha(K_0(A)_+) = K_0(B)_+$

ו- $\alpha[1_A] = [1_B]$

אז קיים איזומורפיזם $\varphi: A \to B$

כך ש- $\varphi_* = \alpha$

והוא יחיד עד כדי שקילות אוניטרית מקורבת

(approximate unitary equivalence)

כלומר אם $\varphi, \psi: A \to B$

איזומורפיזמים כך ש-

$\varphi_* = \psi_*$

אז קיימת סדרת אוניטריים $u_n \in B$

כך ש- $\psi(a) = \lim_{n\to\infty} u_n \varphi(a) u_n^*$

לכל $a \in A$.

<u>הוכחה:</u> נניח ש- $A = \overline{\bigcup A_n}$

$B = \overline{\bigcup B_n}$

איחוד עולה של אלגבראות סוף מימדיות.

ניתן להניח בלי הגבלת הכלליות שלכולם יש יחידה משותפת.

$K_0(A_1)$ הוא מוגדרת ב

עבור l כלשהו.

אז קיים הומומורפיזם $\varphi_1: A_1 \to B$

שמשרה את $K_0(A_1) \to K_0(B): \alpha \circ \iota_1^A$,

מכיוון ש- $\varphi_1(A_1)$ סוף מימדית,

קיים אוניטרי u ב-B ו- m_1 כך ש-

$u\varphi_1(A_1)u^* \subseteq B_{m_1}$,

ע"י כך שנחליף את φ_1 ב- $\mathrm{Ad}\,u \circ \varphi_1$

אפשר להניח בלי הגבלה ש-

$\varphi_1(A_1) \subseteq B_{m_1}$.

(בנוסף $\varphi(1_{A_1}) = 1_{B_1}$).

באופן דומה, נמצא n_2 ו- $\psi_2 : B_{m_1} \to A_{n_2}$ כך ש- $\iota^A_{n_2 *} \circ \psi_{2*} = \alpha_*^{-1} \circ \iota^B_{m_1 *}$

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\iota^A_{n_2,1}"] \arrow[dr, "\varphi_1"'] & A_{n_2} \arrow[r, "\iota^A_{n_2}"] & A \\ & B_{m_1} \arrow[u, "\psi_2"'] & \end{tikzcd}$$

הדיאגרמה הנ"ל לאו דווקא מתחלפת,
אבל ידוע לנו ש $\iota^A_{n_2 *} \psi_{2*} \circ \varphi_{1*} = \iota^A_{1*}$
ולכן קיים אוניטרי u כך ש
$$\mathrm{Ad}\,u \circ \iota^A_{n_2} \circ \psi_2 \circ \varphi_1 = \iota^A_1$$
אך לאו דווקא נמצא ב- A_{n_2}
וגם לאו דווקא בשום אלגברה מהצורה A_k.
אבל קיים k גדול מספיק כך שנוכל
למצוא אוניטרי v ב- A_k כך ש-

$\|v-u\|<1/4$, ואז
$$\|\mathrm{Ad}\,v \circ \iota^A_{k,n_2} \circ \psi_2 \circ \varphi_1(x) - x\| < \tfrac{1}{2}\|x\|$$
לכל $x \in A_1$, לכן עבור $p \in A$ הטלה,
$\iota^A_{k,n_2} \circ \psi_2 \circ \varphi_1(p) \sim p$,
ולכן בפרט, ומאחר שהטלות ב- A_1 יוצרות את K_0,
$$(\iota^A_{k,n_2} \circ \psi_2 \circ \varphi_1)_* = \iota^A_{k,1*} : K_0(A_1) \to K_0(A_k)$$
ע"י רק שנגדיל את n_2, אפשר
להניח שבה"כ $n_2 : k$,
כלומר $(\psi_2 \circ \varphi_1)_* = \iota^A_{n_2,1*}$
מההגדרה מופעל של A_{n_2}, קיים
אוניטרי שב A_{n_2} כך ש-
$$\mathrm{Ad}\,w \circ \psi_2 \circ \varphi_1 = \iota^A_{n_2,1}$$
אם כן, נחליף את ψ_2 ב- $\mathrm{Ad}\,w \circ \psi_2$
במקרה הכולל, ונקבל
דיאגרמה מתחלפת

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\iota^A_{n_2,1}"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & A_{n_2} \\ B_{m_1} \arrow[ur, "\psi_2"'] & \end{tikzcd}$$

בעזרת הטענה, אנחנו יכולים למצוא:

$m_1 \le m_2 \le m_3 \le \cdots$

$1 = n_1 \le n_2 \le n_3 \le \cdots$

והומומורפיזמים $\varphi_k : A_{n_k} \to B_{m_k}$

ו- $\psi_{k+1} : B_{m_k} \to A_{n_{k+1}}$,

כך שהדיאגרמה הבאה מתחלפת:

$$\begin{tikzcd}
A_{n_1} \arrow[rr] \arrow[dr, "\varphi_1"] & & A_{n_2} \arrow[rr] \arrow[dr, "\varphi_2"] & & A_{n_3} \arrow[rr] \arrow[dr, "\varphi_3"] & & \cdots \\
& B_{m_1} \arrow[ur, "\psi_2"] \arrow[rr] & & B_{m_2} \arrow[ur, "\psi_3"] \arrow[rr] & & B_{m_3} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

הדיאגרמה משרה איזומורפיזם של הגבולות האינדוקטיביים, והאיזומורפיזם המושרה של חבורות K_0 הוא α.

נניח עכשיו ש- $\varphi, \rho : A \to B$ הם איזומורפיזמים כך ש- $\varphi_* = \rho_*$.

אז לכל n, $(\varphi \circ \iota_n^A)_* = (\rho \circ \iota_n^A)_*$

אז מהלמה הקודמת, יש $u_n \in B$ כך ש: $\mathrm{Ad}\, u_n \circ \varphi \circ \iota_n^A = \rho \circ \iota_n^A$

כלומר $u_n \varphi(x) u_n^* = \rho(x)$ לכל $x \in A_n$.

בפרט, אם $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ (בלי סגור) אז $u_n \varphi(x) u_n^* = \rho(x)$ פרט למספר סופי של אינדקסים.

לכן אם $x \in A$, ומאחר ש- $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ צפוף ב- A נקבל ש-

$u_n \varphi(x) u_n^* \longrightarrow \rho(x)$ כנדרש.

הערה: במקרה של- A ו- B אין יחידה, ישנו משהו דומה, ואשר במקום לעבוד עם $[1_A]$, $[1_B]$, צריך לדרוש שהאלגברה הסקילות של המוכל ב- A ישלחו ע"י α לקבוצה מהאלגברה הסקילות של המוכל ב- B.

ההגדרה די דומה - לא נעכב עליה פה.

הגדרה: חבורה אבלית סדורה חלקית היא לא מחוררת unperforated אם $0 \le n g$ עבור g בחבורה, נ"ח לגבי מזה אז $0 \le g$.

דוגמא לחבורה מחוררת! ← ואשר האיברים החיוביים הם

$$\{0,2,3,4,\dots\}$$

הגדרה: חבורה סדורה חלקית מקיימת את תכונת האינטרפולציה של Riesz אם

$$\begin{tikzcd} y_1 \arrow[dr] & & y_2 \arrow[dl] \\ & z \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ x_1 & & x_2 \end{tikzcd}$$

לכל x_1, x_2, y_1, y_2 כך ש- $y_k \ge x_j$ לכל $k, j \in \{1,2\}$ קיים z כך ש- $y_1, y_2 \ge z$ וגם $x_1, x_2 \le z$.

משפט Effros-Handelman-Shen

חבורה, אבלית סדורה חלקית בת מנייה
היא איזומורפית לחבורת K_0 של
אלגברת AF אם ורק אם היא
לא מחוררת ומקיימת את תכונת
האינטרפולציה של ריס.

(לא נוכיח את זה)

<u>תרגיל</u>: אם X קבוצת קנטור אז
$$K_0(C(X)) \cong C(X,\mathbb{Z})$$

ו- $K_0(C(X))_+$ הם הפונקציות
בעלות ערכים חיוביים.