אלגבראות Cuntz - המשך

$\mathcal{O}_n$ - אלגברת C^* האוניברסלית

שנוצרת על ידי n איברים שמקיימים

לכל k: $S_k^* S_k = 1$

וגם: $\sum_{k=1}^{n} S_k S_k^* = 1$

$n = 2, 3, 4, \dots$

עבור מילה $\mu = k_1 k_2 \cdots k_j$

נסמן $|\mu| = j$

$S_\mu = S_{k_1} S_{k_2} \cdots S_{k_j}$

עבור n נתון, נסמן

$F_k = \mathrm{span}\{ S_\mu S_\nu^* \mid |\mu| = |\nu| = k \} \cong M_{n^k}$

וגם: $F_1 \subseteq F_2 \subseteq F_3 \subseteq \cdots$

וגם: $F = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k} \cong M_{n^\infty} \subseteq \mathcal{O}_n$.

<u>הגדרה</u>: נניח ש-$A \supseteq B$ הם

אלגבראות C^* עם יחידה, <u>התוחלת</u>

<u>expectation</u>

היא העתקה לינארית חיובית מנורמה 1

$E : A \to B$

שגם מקיימת כי $E^2 = E$.

<u>דוגמה\מוטיבציה</u>: נניח ש-$(X, \mathcal{B}, \mu)$

מרחב הסתברות, וגם: $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$

תת-σ-אלגברה.

אז $L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu) \supseteq L^\infty(X, \mathcal{C}, \mu)$

של התוחלת המותנה של $f \in L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ ←

היחידה $E(f) \in L^\infty(X, \mathcal{C}, \mu)$

כך שלכל קבוצה מדידה $S \in \mathcal{C}$

מתקיים ש $\int_X f\chi_S \, d\mu = \int_X E(f)\chi_S \, d\mu$

מתקיים בנוסף $E|_{L^\infty(X,\mathcal{C},\mu)} = id$.

זו העתקה חיובית (כלומר היא שולחת $a \geq 0$

אל $E(a) \geq 0$.

אם A עם יחידה, אז מצב הוא

תוחלת $E : A \to \mathbb{C}$.

אומרים ש- E נאמנה (faithful) אם

לכל $a \geq 0$, אם $a \neq 0$ אז $E(a) \neq 0$.

בהנתן $S \in \Pi_n$ ו λ (מעגל היחידה),

גם האיברים $\lambda S_1, \lambda S_2, \ldots, \lambda S_n$

מקיימים את הנוסחה שמגדירה את $\mathcal{O}_n$,

ולכן הם יוצרים את $\mathcal{O}_n$.

לכן, קיים אוטומורפיזם

$$\gamma_\lambda : \mathcal{O}_n \to \mathcal{O}_n$$

כך ש- $\gamma_\lambda(S_k) = \lambda S_k$

לכל k.

מאחר שההעתקה $\lambda \mapsto \gamma_\lambda(S_k)$

רציפה לכל k, אז לכל $a \in \mathcal{O}_n$

מתקיים $\lambda \mapsto \gamma_\lambda(a)$

רציפה. מדוע? אם

$a \in *\text{-alg}(S_1, \ldots, S_n)$

אז זה ברור,

ואם $a\in\mathcal{O}_n$, נתון $\varepsilon>0$ נמצא

$b\in *\text{-alg}(S_1,\dots,S_n)$ עם $\|a-b\|<\varepsilon/3$.

נמצא $\delta>0$ כך שלכל λ_1,λ_2

אם $|\lambda_1-\lambda_2|<\delta$ אז

$$\|\gamma_{\lambda_1}(b)-\gamma_{\lambda_2}(b)\|<\varepsilon/3$$

ואז

$$\|\gamma_{\lambda_1}(a)-\gamma_{\lambda_2}(a)\| \le$$
$$\le \|\gamma_{\lambda_1}(a-b)\| + \|\gamma_{\lambda_1}(b)-\gamma_{\lambda_2}(b)\| + \|\gamma_{\lambda_2}(b-a)\| < \varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon.$$

<u>טענה:</u> קיימת התניה נאמנה

$E:\mathcal{O}_n\to F\cong M_{n^\infty}$.

<u>הגדרה:</u> לכל $a\in\mathcal{O}_n$, נגדיר

$$E(a)=\int_{\mathbb{T}} \gamma_\lambda(a)\,d\lambda$$

(אינטגרל רימן)

אז $\|E\|\le 1$, ו-$E(1)=1$

אז $\|E\|=1$.

כמו כן, אם $a\ge 0$ אז $\gamma_\lambda(a)\ge 0$

(כי γ_λ אוטומורפיזם) ומאחר שסכום

של חיוביים הוא חיובי, ואוסף החיוביים

סגור בנורמה, הרי שגם $E(a)\ge 0$.

נראה שהתמונה היא F.

נשים לב ש-

$$\text{span}\{S_\mu S_\nu^* \mid \mu,\nu \text{ מילים}\}$$
$$\parallel$$
$$*\text{-alg}(S_1,\dots,S_n)$$

צפוף ב-$\mathcal{O}_n$.

אז מספיק לבדוק לגבי אלה שלהם.

אם $|\mu|=|\nu|$ אז $\gamma_\lambda(S_\mu S_\nu^*)=S_\mu S_\nu^*$

לכל λ, ולכן

$E(S_\mu S_\nu^*)=S_\mu S_\nu^*$.

ובמקרה הזה, $\gamma_\lambda(S_\mu S_\nu^*) = \lambda^{|\nu|-|\mu|} S_\mu S_\nu^*$

ולכן אם $|\nu| \neq |\mu|$ אז

$$\int_{\mathbb{T}} \gamma_\lambda(S_\mu S_\nu^*)\, d\lambda = \int_{\mathbb{T}} \lambda^{|\nu|-|\mu|}\, d\lambda \cdot S_\mu S_\nu^* = 0$$

לכן $E(*\text{-alg}(S_1,\dots,S_n)) \subseteq F$

והתמונה צפופה, כי E רציפה עליה בנורמה. התמונה של E סגורה,

לכן נכון גם להגדיר את $E: \mathcal{O}_n \to F$

הטלה.

כדי להראות שהיא נאמנה, נניח ש $a \geq 0$, וכי $a \neq 0$.

ניקח מצב φ כך ש- $\varphi(a) > 0$.

אז

$$\varphi(E(a)) = \int_{\mathbb{T}} \varphi(\gamma_\lambda(a))\, d\lambda$$

אבל כן, $\varphi(\gamma_\lambda(a))$ פונקציה רציפה בעלת ערכים אי-שליליים וב-0 היא חיובית, ולכן האינטגרל הוא חיובי, ובפרט $E(a) \neq 0$,

<u>טענה:</u> נניח ש- ν,μ מילים כך ש- $|\nu| \neq |\mu|$ וכי $\max\{|\nu|,|\mu|\} \leq k$

אז

$$S_2^* S_1^{*k} (S_\mu S_\nu^*) S_1^k S_2 = 0$$

<u>הוכחה:</u> $S_1^{*k} S_\mu = 0$ אלא אם כן $S_\mu = S_1^j$ עבור $j \leq k$ כלשהו, ואז $S_1^{*k} S_\mu = S_1^{*(k-j)}$.

נניח הפוך, $S_\nu^* S_1^k = 0$

אלא אם כן $S_\nu^* = S_1^l$

עבור $l \le k$ כלשהו, ואז

$$S_\nu^* S_1^l = S_1^{k-l}$$

במקרה זה הביטוי שווה,

$$S_2^* S_1^{k*} S_\mu S_\nu^* S_1^k S_2 = S_2^* S_1^{(k-l)*} S_1^{k-l} S_2$$

שווה ל- 1, אחרת, גם הביטוי הזה

הוא 0.

<u>טענה:</u> לכל m קיימת איזומטריה w_m

כך שלכל ביטוי מהצורה $S_\mu S_\nu^*$

כאשר $m \ge |\nu|,|\mu|$ מתקיים ש-

$$w_m^* S_\mu S_\nu^* w_m = \begin{cases} S_\mu S_\nu^* & |\nu|=|\mu| \\ 0 & |\nu| \neq |\mu| \end{cases}$$

<u>הוכחה:</u> נגדיר

$$w = \sum_{|\delta|=m} S_\delta S_1^{2m} S_2 S_\delta^*$$

אז:

$$w^* w = \sum_{|\delta|,|\gamma|=m} S_\delta S_2^* S_1^{2m*} \underbrace{S_\delta^* S_\gamma}_{=\begin{cases} 1 & \delta=\gamma \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}} S_1^{2m} S_2 S_\gamma^*$$

$$= \sum_{|\delta|=m} S_\delta \underbrace{S_2^* S_1^{2m*} S_1^{2m} S_2}_{=1} S_\delta^* =$$

$$= \sum_{|\delta|=m} S_\delta S_\delta^* = 1$$

כלומר w איזומטריה. עכשיו, אם $|\mu|=m$ אז

$$w S_\mu = \sum_{|\delta|=m} S_\delta S_1^{2m} S_2 \underbrace{S_\delta^* S_\mu}_{\substack{0 \text{ אם } \mu\neq\delta \\ 1 \text{ אם } \mu=\delta}} = S_\mu S_1^{2m} S_2$$

במקרה הזה, $S_\nu^* w = S_1^{2m} S_2 S_\nu^*$

אז אם $|\nu|=|\mu|=m$: $w^* S_\mu S_\nu^* w =$

$$= \underbrace{w^* S_\mu}_{S_\mu S_2^* S_1^{2m*}} S_1^{2m} S_2 S_\nu^* = S_\mu S_\nu^*$$

אם $|\nu| \neq |\mu|$ והשניים קטנים מ-m

נניח ש- $|\mu|=m$, אז,

$$w^* S_\mu S_\nu^* w = S_\mu S_2^* S_1^{2m*} S_\nu^* w =$$

$$= S_\mu S_2^* S_1^{2m*} S_\nu^* \sum_{|\delta|=m} S_\delta S_1^{2m} S_2 S_\delta^*$$

ולכל δ עם $|\delta|=m$: $S_2^* S_1^{2m*} S_\nu^* S_\delta S_1^{2m} S_2 = 0$

כנ"ל למקרה שבו $|\nu|=m$.

$$\left(S_\mu S_\nu^* = S_\mu \sum_{k=1}^n S_k S_k^* S_\nu^* = \sum_{k=1}^n S_\mu S_k (S_\nu S_k)^* \right)$$

<u>מסקנה:</u> לכל $a \in O_n$, $w_m^* a w_m \xrightarrow[m\to\infty]{} E(a)$.

<u>מסקנה:</u> O_n פשוטה.

<u>הוכחה:</u> נניח ש $J \lhd O_n$ אידיאל. נניח ש- $0 \neq a \in J$, אפשר להניח ש $a > 0$.

אז $w_m^* a w_m \in J$

ולכן $E(a) = \lim_{m\to\infty} w_m^* a w_m$

נמצא ב-J, והוא שונה מ-0.

מכאן, $J \cap F \neq \emptyset$.

אז $F \supset J \cap F \neq 0$

אבל F פשוטה ולכן $J \cap F = F$

בפרט $1 \in J$ ולכן $J = \mathcal{O}_n$.

<u>תרגיל:</u> נניח ש- $a \in \mathcal{O}_n$ כך ש- $a \neq 0$.
אז קיים $x \in \mathcal{O}_n$ כך ש- $xax^* = 1$.

(נוכיח בפעם הבאה)

(בפרט, אם $a \neq 0$ לא משנה מה יש x, y
כך ש- $xay = 1$
כי אז $aa^* \neq 0$ אז קיים x כך
ש- $xaa^*x^* = 1$ ונגדיר $y = a^*x^*$).

<u>מסקנה:</u> נניח ש- $p \in \mathcal{O}_n$ הטלה, אז
יש x כך ש- $xpx^* = 1$
אם נסמן $q = px^*xp$
אז q הטלה, $q \le p$, וגם $q \sim 1$

(אם $v = xp$
אז $vv^* = 1$, $v^*v = q$)

<u>הערה:</u> $1 = \sum_{k=1}^{n} S_k S_k^*$

נסמן $p_k = S_k S_k^*$
אז $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$
וגם $p_k \sim 1$

אז בחבורת K_0, מתקיים $[1] = n \cdot [1]$
כלומר $(n-1) \cdot [1] = 0$.

ניתן להוכיח למעשה ש- $K_0(\mathcal{O}_n) = \mathbb{Z}_{n-1}$
(לא נוכיח פה)