משפט. אם $a\in\mathcal{O}_n$ חיובי ושונה מ-0 אז קיים $x\in\mathcal{O}_n$ כך ש- $xax^*=1$.

הוכחה: מאחר שההעתקה $E:\mathcal{O}_n\to M_{n^\infty}$ היא נאמנה אנחנו יודעים ש $E(a)\neq 0$.
ע"י נרמול נניח ש- $\|E(a)\|=1$.
בנוסף, יהי ε ונמצא $b\in *\text{-alg}(S_1,\dots,S_n)$ שהוא חיובי ומקיים $\|a-b\|<\varepsilon$.
(מדוע יש כזה? נמצא $c\in *\text{-alg}(S_1,\dots,S_n)$ שמקרב את $\sqrt{a}$, ואז $c^*c\geq 0$ ומקרב את a).
נניח של המילים שמופיעות בביטוי שמגדיר את b הן באורך לכל היותר k.

אז אנחנו יודעים שקיימת איזומטריה w כך ש- $w^*bw\in F_k\cong M_{n^k}$
ו- $w^*bw=E(b)$

כלומר בפרט,
$\|w^*bw\|\geq 1-\varepsilon$
אם כן, ל- w^*bw, כאשר חושבים עליו כמטריצה, יש ערך עצמי כלשהו שגדול או שווה ל- $1-\varepsilon$,
כלומר קיים $\mathbb{R}\ni\lambda\geq 1-\varepsilon$
והטלה מינימלית $e\in F_k$,
כך ש- $ew^*bwe=\lambda e$ $(=w^*bwe)$
נמצא איזומטריה u כך ש
$u^*eu=e_{11}=S_1^kS_1^{*k}$
כלומר אם נסמן $z=wu$ אז
$\frac{1}{\lambda}z^*bz\,S_1^kS_1^{*k}=S_1^kS_1^{*k}$

נסמן $y = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} z s_1^k$

אז $\|y\| = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} < \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}}$

נשים לב ש- $s_1^k s_1^{k*} s_1^k = s_1^k$

אז $y^*by = \frac{1}{\lambda} s_1^{k*} z^* b z s_1^k =$

$\frac{1}{\lambda} s_1^{k*} z^* b z s_1^k s_1^{k*} s_1^k =$

$= s_1^{k*} s_1^k s_1^{k*} s_1^k = 1$

אפרון

$\|y^*ay - 1\| = \|y^*ay - y^*by\|$

$= \|y^*(a-b)y\| < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$

אם אז נבחר ε כך ש- $\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} < 1$
(כלומר $\varepsilon < 1/2$) אז y^*ay הפיך, וגמרנו.

אז אם נגדיר $d = (y^*ay)^{-1/2}$

ונסמן $x = yd$

אז $x^*ax = 1$ כנדרש.

<u>הגדרה:</u> אלגברת C^* פשוטה עם יחידה
נקראת <u>אין-סופית לגמרי</u>
<u>purely infinite</u>
אם היא מקיימת את מסקנת
המשפט.

<u>הערה:</u>
ישנו מושג של אלגברת C^* <u>גרעינית</u>
או <u>אמנבילית</u> (nuclear, amenable)
(קשור איכשהו לאמנביליות של חבורות)
(לא ניתן פה את ההגדרה; המשפחה הזו
כוללת בין היתר אלגבראות AF, אלגבראות
קומוטטיביות ועוד אלגבראות רבות)

ישנו "משפט המקדמים האוניברסליים"

Universal coefficient theorem

שאומר משהו שמראה שאיזשהי סדרה מדויקת שקשורה לגורם K גם אכן מדויקת בתנאים מסוימים, של האלגבראות הנוקלאריות הידועות מקיימות אותו (השאלה אם כל האלגבראות הנוקלאריות מקיימות את UCT היא שאלה פתוחה).

משפטי Kirchberg-Phillips:

1) משפט השיכון: B אלגברת C^* ספרבילית ואקסקטית (לא ממש מדויקת exact) ניתנת לשיכון ב O_2.

2) משפט הבליעה: אם A פשוטה עם יחידה, נוקלארית, ספרבילית ואין-סופית. להוכיח את

$$A\otimes O_\infty \cong A$$

$$A\otimes O_2 \cong O_2$$

(צריך להגדיר מכפלה טנזורית של אלגבראות C^*)

3) משפט המיון: אם A,B פשוטות עם יחידה, נוקלאריות ספרביליות ואין-סופיות טהורות ומקיימות UCT אז אם

$$(K_0(A),[1_A],K_1(A)) \cong (K_0(B),[1_B],K_1(B))$$

אז $A\cong B$.

אלגבראות C^* של חבורה

נדבר פה רק על חבורות דיסקרטיות,
למרות שניתן להגדיר אלגבראות כאלה
גם לחבורות לא דיסקרטיות.

תהי G חבורה דיסקרטית. לכל הצגה
אוניטרית $\pi: G \to \mathcal{U}(H)$
(כאשר מרחב הילברט H כלשהו)
אפשר להגדיר

$$C^*_\pi(G) = C^*(\pi(g) \mid g\in G) \subseteq B(H)$$

ההצגה האוניברסלית - סכום ישר של
כל ההצגות האוניטריות הציקליות
על מרחב הילברט שיש לו בסיס אורתונורמלי
מעוצמה k G, אז כל הצגה של
G שקולה אוניטרית לסכום ישר של
תת-הצגות של ההצגה האוניברסלית.

מסמנים ב- $C^*(G)$ - אלגברת C^*
המלאה של G
(full group C^*-algebra)
האלגברה C^* שנוצרת על ידי
ההצגה האוניברסלית.

אם נסמן ב- $\{u_g \mid g\in G\} \subseteq C^*(G)$
את האוניטריים שמתאימים לאיברי G
תחת ההצגה הזו, אז כל הצגה של
$C^*(G)$ תתאים הצגה לאוניטריים,
ולכן יש התאמה חד-חד-ערכית בין
הצגות אוניטריות של G להצגות
של $C^*(G)$.

ההצגה הרגולרית השמאלית של G

ההצגה $g \mapsto \lambda_g$

על $\ell^2(G)$

שמוגדרת על ידי $\lambda_x \delta_y = \delta_{xy}$

כאשר $\{\delta_x \mid x \in G\}$ הבסיס הסטנדרטי.

או באופן שקול אם $\xi \in \ell^2(G)$

אז $(\lambda_x \xi)(y) = \xi(x^{-1}y)$.

$$\left(\ell^2(G) = \{\xi : G \to \mathbb{C} \mid \sum_{x \in G} |\xi(x)|^2 < \infty\}\right)$$

אלגברת C^* המצומצמת של G $C^*_r(G)$

reduced group C^*-alg

היא אלגברת C^* שנוצרת על ידי

$\{\lambda_x \mid x \in G\} \subseteq B(\ell^2(G))$

אם כן, יש לנו העתקה טבעית

$C^*(G) \longrightarrow C^*_r(G)$.

משפט (ללא הוכחה): ההעתקה הנ"ל

היא איזומורפיזם אם ורק אם

G אמנבילית.

נתמקד במקרה של $C^*_r(G)$.

נסמן ב- $\{\delta_x \mid x \in G\}$

את הבסיס הסטנדרטי של $\ell^2(G)$.

למה: המפה $\tau : C^*_r(G) \longrightarrow \mathbb{C}$

שמוגדרת על ידי $\tau(a) = \langle \delta_e, a\delta_e \rangle$

הינו עקבה נאמנה.

הוכחה: כדי להראות זאת עקבה צריך להראות ש- $\tau(ab)=\tau(ba)$ לכל $a,b\in C^*_r(G)$.

מאחר ש- τ רציפה, מספיק להראות זאת לכל a,b בקבוצה צפופה, כלומר מספיק להראות את זה על $\mathbb{C}G\subseteq C^*_r(G)$ (האלגברה שנוצרת ע"י $\{\lambda_g\}_{g\in G}$), ולמעשה מספיק לבדוק את זה עבור $a=\lambda_x$ $b=\lambda_y$ כי מזה ינבע שהשוויון תקף גם עבור צירופים ליניאריים.

אכן,

$$\tau(\lambda_x\lambda_y)=\tau(\lambda_{xy})=$$
$$=\langle\delta_e,\lambda_{xy}\delta_e\rangle=\langle\delta_e,\delta_{xy}\rangle=$$
$$=\begin{cases}0 & xy\neq e\\ 1 & xy=e\end{cases}=$$
$$=\begin{cases}0 & yx\neq e\\ 1 & yx=e\end{cases}=\tau(\lambda_{yx})$$

נניח עכשיו ש- $a\geq 0$ וכי $\tau(a)=0$. צריך להראות ש- $a=0$. אז לכל x,

$$\langle\delta_x,a\delta_x\rangle=\langle\lambda_x\delta_e,a\lambda_x\delta_e\rangle$$
$$=\langle\delta_e,\underbrace{\lambda_{x^{-1}}}_{=\lambda_x^{-1}}a\lambda_x\delta_e\rangle=$$
$$=\tau(\lambda_{x^{-1}}a\lambda_x)=\tau(a)=0$$

נשים לב שמתקיים ש- $a \geq 0$,
התבנית $(\xi,\eta) = \langle \xi, a\eta \rangle$
מוגדרת אי-שלילית ולכן מקיימת את
אי-שוויון קושי-שוורץ, כלומר

$$|\langle \xi, a\eta \rangle|^2 \leq \langle \xi, a\xi \rangle \langle \eta, a\eta \rangle$$

לכן, בפרט $(\delta_x, a\delta_y) = 0$
לכל $x \neq y$. לכן $a=0$ כנדרש.

<u>משפט</u> (Powers): $C_r^*(F_n)$ היא פשוטה
ועם עקבה יחידה, כאשר F_n
עבור $n \geq 2$ היא החבורה החופשית
עם n יוצרים.

נראה עבור $n=2$ - המקרה הכללי דומה.

<u>הערה:</u> עבור G דיסקרטית כללית, $L(G) \subseteq B(\ell^2(G))$, אלגברת פון-נוימן של G, שמוגדרת להיות $\overline{C_r^*(G)}^{SOT}$.

<u>בעיית האיזומורפיזם לאלגבראות פון-נוימן של חבורות חופשיות:</u>

עם $n \neq m \geq 2$, האם
$L(F_n) \cong L(F_m)$?

במקרה של אלגבראות C^*, אפשר
להראות ש- $K_1(C_r^*(F_n)) \cong \mathbb{Z}^n$
(משפט של Pimsner-Voiculescu)
ולכן הן לא איזומורפיות.