משפט (Powers): עבור $n\ge 2$, האלגברה $C^*_r(F_n)$ פשוטה ויש לה עקבה יחידה.

(נוכיח עבור $n=2$)

למה: נניח ש- (H מרחב הילברט),

$$H=H_1\oplus H_2$$

נחשוב על אופרטור $a\in B(H)$ כעל מטריצה

$$a=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$$

$$a_{kj}: H_j\to H_k$$

נניח ש- $b\in B(H)$ הוא מהצורה $\begin{pmatrix}0 & *\\ * & *\end{pmatrix}$

ונניח $u_1,\dots,u_n\in B(H)$ יוניטריים כך שאם $k\ne j$ אז $u_k u_j^*$ הוא מהצורה $\begin{pmatrix}* & *\\ * & 0\end{pmatrix}$

אז

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k b u_k^*\right\| < \frac{2}{\sqrt{n}}\|b\|$$

הוכחה: מספיק לבדוק ל-b מהצורה $\begin{pmatrix}0 & *\\ 0 & *\end{pmatrix}$ או $\begin{pmatrix}0 & 0\\ * & *\end{pmatrix}$ עם $\frac{1}{\sqrt{n}}$ במקום $\frac{2}{\sqrt{n}}$

ומאחר שאחד הוא הצמוד של השני, ואי-השוויון נכון ל-b אם ורק אם הוא נכון ל-b^* מספיק לבדוק למטריצה מהצורה, נאמר ל- $\begin{pmatrix}0 & 0\\ * & *\end{pmatrix}$,

נניח ש- c מהצורה $\begin{pmatrix}* & *\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

אז

$$\|b+c\|^2=\|(b^*+c^*)(b+c)\|=$$
$$=\|b^*b+c^*c\|\le\|b^*b\|+\|c^*c\|$$
$$=\|b\|^2+\|c\|^2$$

מסקנה: נסמן $F_2=\langle a,b\rangle$

אז לכל $g\in F_2$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_a^k u_g u_a^{-k} = \begin{cases} u_g & g\in\langle a\rangle \\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

הוכחה: אם $g\in\langle a\rangle$ - ברור.

נניח אחרת. אזי ניתן להציג g

כמילה מצומצמת ומספיק כי b או b^{-1}

$g=a^m h a^l$ (כאשר מתחילה ומסתיימת

אז לסכום הנ"ל יש משמעות הגיאומטרית.

$$H_1=\mathrm{Span}\{\delta_h \mid h=e,\ h=a\cdots \text{ או } h=a^{-1}\cdots\}$$ (נסמן

$$H_2=H_1^{\perp}=\mathrm{Span}\{\delta_h \mid h=b\cdots \text{ או } h=b^{-1}\cdots\}$$

אז $u_g(H_1)\subseteq H_2$.

אז אם $k\neq j$ אז

$$u_k u_j^* b (u_k u_j^*)^*$$

הוא מהצורה:

$$\begin{pmatrix}*&*\\ *&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\ *&*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}*&*\\ *&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}*&*\\ 0&0\end{pmatrix}$$

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n} u_k b u_k^*\Big\|^2=\Big\|u_1\Big(b+\sum_{k=2}^{n} u_1^* u_k b u_k^* u_1\Big)u_1^*\Big\|^2$$

$$=\Big\|b+\underbrace{\sum_{k=2}^{n} u_1^* u_k b u_k^* u_1}_{\begin{pmatrix}*&*\\ 0&0\end{pmatrix}}\Big\|^2\le$$

$$\le\|b\|^2+\Big\|\sum_{k=2}^{n} u_k b u_k^*\Big\|^2\underset{\text{באינדוקציה}}{\le} n\|b\|^2$$

$$\Leftarrow\quad \Big\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k b u_k^*\Big\|\le\frac{1}{\sqrt{n}}\|b\|$$

כנדרש.

אם נראה ש- $u_a^k(H_2) \subseteq H_1$

כלומר u_g מהצורה $\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & * \end{pmatrix}$

אם $k \neq j$ אז $u_a^k u_a^{-j}$

$= u_a^{k-j}$

והוא מהצורה $\begin{pmatrix} * & * \\ * & 0 \end{pmatrix}$

ולכן $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_a^k u_g u_a^{-k} \longrightarrow 0$

מסקנה:

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{m}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} u_a^k u_b^j u_g u_b^{-j} u_a^{-k} = \begin{cases} 1 & g=e \\ 0 & g\neq e \end{cases}$$

מסקנה: אם $x \in C_r^*(F_2)$

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} \frac{1}{n}\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} u_a^k u_b^j x u_b^{-j} u_a^{-k} = \tau(x)1$$

מסקנה: $C_r^*(F_2)$ פשוטה עם עקבה יחידה.

הוכחה: נניח ש- φ עקבה, אז

$$\varphi\Big(\frac{1}{mn}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} u_a^k u_b^j x u_b^{-j} u_a^{-k}\Big) = \varphi(x)$$

לכל x, וגם $\varphi(\tau(x)1) = \tau(x)$

אז נשאיף את n,m ל- ∞

ונקבל $\varphi(x) = \tau(x)$.

לגבי פשטות, אנחנו יודעים ש- τ עקבה נאמנה, כלומר אם $x \geq 0$ ו- $\tau(x) \neq 0$ אז $x \neq 0$.

אם J אידיאל, לכל n,m,

$$\frac{1}{mn}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} u_a^k u_b^j x u_b^{-j} u_a^{-k} \in J$$

$\Longrightarrow \tau(x)1 \in J$ ולכן אם $0 \neq J$ אז $1 \in J \Longrightarrow J = C_r^*(F_2)$.

Breuillard - Kalantar - Kennedy - Ozawa

מכפלות משולבות\מוצלבות

Crossed products

נתונה: אלגברת C^* A (עם יחידה) ו- G חבורה דיסקרטית. פעולה של G על A היא הומומורפיזם $\alpha: G \to \mathrm{Aut}(A)$ זה

כלומר לכל $g \in G$ מתאימים אוטומורפיזם $\alpha_g \in \mathrm{Aut}(A)$ כך ש- $\alpha_g \alpha_h = \alpha_{gh}$,

נניח שיש הצגה אוניטרית של G כאוניטריים ב- A, כלומר

יש אוניטריים $\{u_g\}_{g \in G} \subseteq A$ כך ש- $u_g u_h = u_{gh}$

אז אפשר להגדיר פעולה α ע"י $\alpha_g(a) = u_g a u_g^*$.

לא כל פעולה היא מוגדרת כך.

הרעיון הוא להוסיף לאלגברה אוניטריים פורמליים כדי להפוך את הפעולה לפנימית.

נניח ש- A אלגברת C^* עם יחידה ו- $\alpha: G \to \mathrm{Aut}(A)$ פעולה.

הצגה קו-וריאנטית (Covariant representation) של (A, α) היא זוג $(\pi, \{u_g\}_{g \in G})$

כאשר $\pi: A \to B(H)$ הצגה, $u_g \in B(H)$ הצגה של G, ו- $u_g \pi(x) u_g^* = \pi(\alpha_g(x))$,

המכפלה המשולבת $A \rtimes_\alpha G$
(גם לפעמים $C^*(A,G,\alpha)$)
אלגברת C^* האוניברסלית שנוצרת
על ידי עותק של A ואוניטריים
$\{u_g\}_{g\in G}$ כך שלכל הצגה קו-ורינטית
ל- (π,U), (π ו-$\{U_g\}_{g\in G}$)
יש הצגה
$\tilde{\pi}: A\rtimes_\alpha G \to B(H)$
כך ש $\tilde{\pi}(x)=\pi(x)$
לכל $x\in A$
ולכל g, $\tilde{\pi}(u_g)=U_g$.
כדי להראות שקיים כזו, נתחיל
עם אלגברה החבורה המסובבת AG
שנוצרת על ידי הסכומים הפורמליים

של סכומים סופיים מהצורה $\sum_{g\in G} a_g u_g$
(אפשר להשלים להמקבל את $\ell^1(G,A)$
של הפונקציות $f: G\to A$
שמקיימות $\sum_{g\in G}\|f(g)\|<\infty$,
שזו אלגברת בנך),
עם הכפלה $a u_g b u_h =$
$= a\alpha_g(b)u_{gh}$
ואז כל הצגה קו-ורינטית משרה
הצגה של AG ושל $\ell^1(G,A)$
עם הכפלה הזו. נסמן גם
$\tilde{\pi}: \ell^1(G,A)\to B(H)$
מתקבלת על ידי הצגה קו-ורינטית, ו $\|\tilde{\pi}\|$

לכן, לכל f ב-$\ell^1(G,A)$ מתקיים

$$\sup\{\|\tilde{\pi}(f)\| \mid \tilde{\pi} \text{ מצג מושרה קו-וריאנטי}\} < \infty$$

ולכן אפשר להגדיר את $A \rtimes_\alpha G$

כגמר ההשלמה של $\ell^1(G,A)$,

בנורמה הזו.

(אנו מניחים שקיים לבחור מרחב הילברט

עם גודל מספיק ולקחת סכום ישר

של ההצגות הקו-וריאנטיות על H)

$$\left((a_g u_g)^* = \alpha_{g^{-1}}(a_g^*)\, u_{g^{-1}}\right)$$

$$\underbrace{u_g^* a_g^* u_g}_{\alpha_{g^{-1}}(a)} u_g^*$$

נתמקד במקרה $G = \mathbb{Z}$

ו- $A = C(X)$.

במקרה הזה נתון לנו אוטומורפיזם

$\alpha \in \mathrm{aut}(C(X))$

והפעולה נתונה על ידי α^n

עבור n שלם.

אם כן, מתורת גלפנד יש לנו

הומאומורפיזם $h : X \to X$

כך ש- $\alpha(f) = f \circ h$.

נניח ש- μ מידת הסתברות אינווריאנטית

על X (מידת בורל סופית על X

מטרי קומפקטי). / $\mu = h_*\mu$).

ניקח $H = L^2(X, \mu)$

(נקרא לפעמים הצגת Koopman)

נגדיר $U \in B(H)$

על ידי $U(\xi) = \xi \circ h^{-1}$

אז מאחר ש-μ אינווריאנטית U הוא אוניטרי.

יש לנו הצגה $\pi : C(X) \to B(H)$

על ידי $\pi(f) = M_f$

אופרטור הכפלה.

אז $U M_f U^* = M_{f \circ h}$

$$((U M_f U^*)\xi)(x) = ((M_f U^*)\xi)(h^{-1}(x))$$

$$= f(h^{-1}(x)) \cdot (U^*\xi)(h^{-1}(x)) =$$

$$= f(h^{-1}(x))\, \xi(x) = M_{f \circ h^{-1}}$$

דוגמה: $X = \mathbb{T}$

מעגל היחידה, ויהי h נתון על ידי סיבוב בזווית שהיא כפולה אי-רציונלית של 2π.

$C(\mathbb{T})$ היא האלגברה האוניברסלית שנוצרת על ידי אוניטרי.

נסמן $C(\mathbb{T}) = C^*(v)$

אז α הוא האוטומורפיזם $\alpha(v) = \lambda v$

כאשר $\lambda = e^{2\pi i \theta}$, θ אי-רציונלי

אם כן, במכפלה [illegible] המוצלבת, יש U אוניטרי נוסף כך ש- $UvU^* = \lambda v$

האלגברה הזו נקראת אלגברת סיבוב אי-רציונלי

irrational rotation algebra

(יוני מסומנת

$$A_\theta = C^*(u,v)$$

נזכיר גם שמקיימים את הזהות

$$uv = \lambda vu$$