<u>למה:</u> אם A אלגברת C^* עם יחידה ו- φ פונקציונל לינארי כך ש- $\|\varphi\| = 1 = \varphi(1)$

אז φ חיובי.

<u>הוכחה:</u> <u>שלב א':</u> נראה שאם $a = a^*$ אז $\varphi(a) \in \mathbb{R}$.

נניח בלי הגבלת הכלליות ש- $\|a\| \le 1$

אלגברה ונורמה ש $\|a \pm in\|^2 \le n^2+1$

אז $|\varphi(a) \pm in| \underset{\varphi(1)=1}{=} |\varphi(a \pm in)| \le \sqrt{n^2+1}$

לכן $\varphi(a) \in \overline{B_{\sqrt{n^2+1}}(\mp in)} \subseteq \mathbb{C}$

(הכדור הסגור ברדיוס $\sqrt{n^2+1}$

סביב in).

$\Rightarrow \varphi(a) \in \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} \overline{B_{\sqrt{n^2+1}}(in)} = [-1,1]$ ציור

כלומר $\varphi(a) \in \mathbb{R}$ כנדרש.

נניח עכשיו ש- $0 \le a \le 1$

אז $\|2a-1\| \le 1$

ומ- $\varphi(a) \in \mathbb{R}$ אז

$|2\varphi(a) - 1| \le 1$

$\Rightarrow -1 \le 2\varphi(a) - 1 \le 1$

$\Rightarrow 0 \le \varphi(a) \le 1$

$\Rightarrow$ φ חיובי כנדרש.

מסקנה: אם $a\in A$ נורמלי אז קיים מצב φ כך ש- $\varphi(a)=\|a\|$ (ראינו בפעם שעברה).

מסקנה: לכל $a\in A$ קיימת הצגה $\pi: A\to B(\mathcal{H})$ כך ש- $\|\pi(a)\|=\|a\|$.

הוכחה: נבחר מצב φ כך ש- $\varphi(a^*a)=\|a^*a\|$. תהי $(\mathcal{H},\pi,\xi)$ שלשת GNS המתאימה. אז

$$\|a\|^2\geq\|\pi(a)\|^2\geq\|\pi(a)\xi\|^2=$$
$$=\langle\pi(a)\xi,\pi(a)\xi\rangle=\langle\xi,\pi(a^*a)\xi\rangle$$
$$=\varphi(a^*a)=\|a^*a\|=\|a\|^2.$$

מסקנה: (משפט Gelfand–Naimark)

כל אלגברת C^* ניתנת לשיכון ב- $B(\mathcal{H})$ עבור $\mathcal{H}$ מתאים.

הוכחה: נגדיר

$$\mathcal{H}=\bigoplus_{\varphi\text{ מצב}}\mathcal{H}_\varphi$$

ונגדיר

$$\pi=\bigoplus_{\varphi\text{ מצב}}\pi_\varphi$$

כאשר, אם נסמן $S(A)$ - המצבים של A, אז

$$\mathcal{H}=\Big\{f:S(A)\to\bigsqcup_{\varphi\in S(A)}\mathcal{H}_\varphi\ \Big|\ \sum_{\varphi\in S(A)}\|f(\varphi)\|^2<\infty\Big\}$$

זה מרחב הילברט עם המכפלה הפנימית

$$\langle f,g\rangle=\sum_{\varphi\in S(A)}\langle f(\varphi),g(\varphi)\rangle_{\mathcal{H}_\varphi}$$

ואז $\pi(a)(f)(\varphi) =$

$= \pi_\varphi(a) f(\varphi)$

לכן לכל $a \in A$, $\|\pi_\varphi(a)\| \le \|\pi(a)\|$

ולכן מהמסקנה הקודמת, $\|\pi(a)\| = \|a\|$

לכל $a \in A$.

טענה: אם A ספרבילית, אז אפשר לשכן אותה ב- $B(H)$ כאשר H ספרבילי.

(תרגיל - מספיק לבחור הרבה כך שיש $\aleph$ מצבים שמתאימים לקבוצה צפופה בכדור היחידה של A)

טופולוגיות חשובות על $B(H)$

הטופולוגיה האופרטורית החלשה WOT

weak operator topology

היא הטופולוגיה הגסה ביותר שעבורה הפונקציונלים הלינאריים

$$T \longmapsto \langle \xi, T\eta \rangle$$

רציפים, כאשר $\xi, \eta \in H$.

אם כן, הפונקציונלים הלינאריים הרציפים בטופולוגיה הזו הם מהצורה

$$T \longmapsto \sum_{k=1}^{n} \langle \xi_k, T\eta_k \rangle$$

עבור $\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n \in H$.

רשת T_α מתכנסת ל-T בטופולוגיה, אם״ם $\langle \xi, (T_\alpha - T)\eta \rangle \to 0$ לכל $\xi, \eta \in H$.

הטופולוגיה האופרטורית החזקה SOT
Strong operator topology
היא הטופולוגיה של התכנסות
נקודתית. כלומר, $T_\alpha \xrightarrow[\alpha]{SOT} T$
אם כך $\|(T-T_\alpha)\xi\| \xrightarrow[\alpha]{} 0$
לכל $\xi \in H$.

הטופולוגיה האופרטורית החזקה יותר
חזקה מהחלשה (אם רשת מתכנסת
ב-SOT אז היא מתכנסת גם ב-WOT)
דוגמא לרשת שמתכנסת WOT אבל
לא SOT: ההסטה
$S \in B(\ell^2(\mathbb{N}))$
$S(\delta_n) = \delta_{n+1}$

אז $S^n \xrightarrow[n\to\infty]{WOT} 0$
אבל הסדרה לא מתכנסת ב-SOT.

הכפלה מימין או משמאל באופרטור T
היא רציפה גם ה-SOT וגם ה-WOT.
לעומת זאת, כפל משותף היא לא
רציף.

דוגמא ב-WOT: ניקח S כמקודם.
אז היא ישפה נבחן השני.
גם $(S^*)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
אבל $(S^*)^n S^n = 1 \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

יש דוגמאות ב-SOT אבל הן יותר מורכבות,
לא נכנס לזה פה.

אף מקומפקטיים לכדור היחידה, אז מכפלה משותפת ב-SOT היא כן רציפה (אבל לא ב-WOT, כפי שהדוגמה הקודמת מראה).

מדוע? נניח ש- $T_\alpha \xrightarrow{SOT} T$, $S_\alpha \xrightarrow{SOT} S$

אז לכל ξ,

$$\|(S_\alpha T_\alpha - ST)\xi\| \le \underbrace{\|S_\alpha(T_\alpha - T)\xi\|}_{\le \underbrace{\|S_\alpha\|}_{\text{חסומה}} \cdot \|(T_\alpha - T)\xi\| \to 0} + \underbrace{\|(S_\alpha - S)T\xi\|}_{\to 0}$$

ולכן $S_\alpha T_\alpha \xrightarrow{SOT} ST$.

תרגיל: סדרה שמתכנסת ב-SOT או WOT היא בהכרח חסומה (בעזרת משפט בנך-שטיינהאוס).

פעולת הצמוד היא רציפה ב-WOT (מיידי) אבל היא לא רציפה ב-SOT; אם S הסטה החד-כיוונית כמקודם, אז

$$(S^*)^n \xrightarrow[n\to\infty]{SOT} 0$$

ואילו $S^n \underset{n\to\infty}{\overset{SOT}{\not\to}} 0$.

הערה: ישנה הטופולוגיה SOT* שבה $T_\alpha \to T$ אם״ם $\|(T_\alpha - T)\xi\| \to 0$ וכן $\|(T_\alpha - T)^*\xi\| \to 0$ לכל ξ.

תרגיל: כדור היחידה הסגור ב-$B(H)$ הוא קומפקטי ב-WOT (נובע ממשפט טיכונוף, כמו בהוכחה של משפט בנך-אלאוגלו).

הערה: כדור היחידה הסגור אינו קומפקטי ב-SOT. דוגמא: ל-הזזה-ימינה, אין לסדרה S^n אף נקודת הצטברות.

טענה: ל-WOT ול-SOT יש אותם פונקציונלים לינאריים רציפים, כלומר, הפונקציונלים הלינאריים הרציפים ב-SOT הם מהצורה $T \mapsto \sum_{k=1}^{n} \langle T\eta_k, \xi_k \rangle$ עבור $\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n \in H$.

הוכחה: נניח ש-φ רציף ב-SOT. נסמן ב-$\mathbb{D}$ את דיסק היחידה ב-$\mathbb{C}$. אז $\varphi^{-1}(\mathbb{D})$ פתוחה ב-SOT. לכן הוא מכיל קבוצה פתוחה בסיסית, כלומר קבוצה מהצורה $\{T \mid \|T\xi_k\| < \varepsilon\}$ עבור $\xi_1, \dots, \xi_n$ נתונים.

הקבוצה הזו מכילה את $\{T \mid \sum_{k=1}^{n} \|T\xi_k\|^2 < \varepsilon^2\}$.

נגדיר $\Phi : B(H) \to H^n$ ע"י

$$\Phi(T) = \begin{pmatrix} T\xi_1 \\ T\xi_2 \\ \vdots \\ T\xi_n \end{pmatrix}$$

נגדיר $\psi : \Phi(B(H)) \to \mathbb{C}$

על ידי $\psi(\Phi(T)) = \varphi(T)$

נשים לב ש- $\left\|\begin{pmatrix} T\xi_1 \\ \vdots \\ T\xi_n \end{pmatrix}\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|T\xi_k\|^2$

ואנחנו יודעים שאם T מקיים שהסכום הנ"ל קטן מ-1 אז $T \in \varphi^{-1}(\mathbb{D})$

כלומר $|\varphi(T)| < 1$.

$\Longrightarrow \|\psi\| \le 1$ (ובפרט הוא מוגדר היטב).

לכן נעזרה משפט האן-בנך

ניתן להרחיב את ψ לכל H^n.

נסמן את ההרחבה שקיבלנו ב- $\tilde{\psi}$.

מהלמה של ריס, קיים $\eta \in H^n$, $\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}$

כך ש- $\tilde{\psi}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix} \right\rangle$

$= \sum_{k=1}^{n} \langle \eta_k, \omega_k \rangle$

$\Longrightarrow \varphi(T) = \sum_{k=1}^{n} \langle \eta_k, T\xi_k \rangle$,

כנדרש.

<u>מסקנה:</u> ל- SOT ו- WOT יש אותם הפונקציונלים הלינאריים הרציפים.

<u>תרגיל:</u> אם H ספרבילי אז כדור היחידה ב- $B(H)$ מטריזבילי ב- WOT וב- SOT.

תזכורת: נוסחת הפולריזציה:

$$\langle \xi, T\eta\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \langle \eta + i^k\xi, T(\eta + i^k\xi)\rangle$$

(הערה: לבדוק סוגריים).

מסקנה: נניח ש- T_γ רשת ש:

$$\langle \xi, T_\gamma \xi\rangle \xrightarrow{\gamma} \langle \xi, T\xi\rangle$$

לכל ξ אז $T_\gamma \xrightarrow[\gamma]{WOT} T$.

למה: נניח ש- $\{T_\gamma\}$ רשת עולה של אופרטורים חיוביים שחסומה מלעיל, אז $\{T_\gamma\}$ מתכנסת ב- WOT.

הוכחה: לכל ξ, הרשת $\langle \xi, T_\gamma \xi\rangle \in [0,\infty)$ עולה וחסומה ולכן מתכנסת.

לכן, לכל η, ξ, הרשת $\langle \eta, T_\gamma \xi\rangle$ מתכנסת גם כן. נסמן

$$[\eta, \xi] = \lim_\gamma \langle \eta, T_\gamma \xi\rangle$$

אז $[\cdot,\cdot]$ תבנית ססקווילינארית חסומה. לכן, קיים T כך ש-

$$[\eta, \xi] = \langle \eta, T\xi\rangle$$

לכל η, ξ.

לכן, $T_\lambda \xrightarrow[\lambda]{WOT} T$.

צריך להוכיח $T_\lambda \xrightarrow[\lambda]{SOT} T$.

נשים לב ש $T_\lambda \geq T$ לכל λ.

באופן כללי, אם R אופרטור חיובי,

אז לכל ξ,

$$\|R\xi\|^2 = (\underbrace{R}_{R^{1/2}\cdot R^{1/2}}\xi, R\xi) = (R^{1/2}\xi, R^{3/2}\xi)$$

$$\le \|R^{1/2}\xi\|\|R^{3/2}\xi\| =$$

$$= \sqrt{\langle R^{1/2}\xi, R^{1/2}\xi\rangle}\sqrt{\langle R^{3/2}\xi, R^{3/2}\xi\rangle}$$

$$= \sqrt{\langle \xi, R\xi\rangle}\sqrt{\langle \xi, R^3\xi\rangle}$$

אז $\|(T-T_\lambda)\xi\|^2 \le$

$$\le \underbrace{\langle \xi, (T-T_\lambda)\xi\rangle^{1/2}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\langle \xi, (T-T_\lambda)^3\xi\rangle^{1/2}}_{\text{חסום}}$$

$\Leftarrow$ $\|(T-T_\lambda)\xi\| \xrightarrow[\lambda]{} 0$

כלומר $T_\lambda \xrightarrow[\lambda]{SOT} T$

כנדרש

שימוש: הטלות ספקטרליות של קבוצות

בפרט: נניח ש- $a=a^*$.

נניח ש- $U\subseteq\sigma(a)$ פתוחה.

נבחר סדרה עולה של פונקציות

$f_n\in C(\sigma(a))$

כך ש- $f_n(x)=0$ אם $x\notin U$

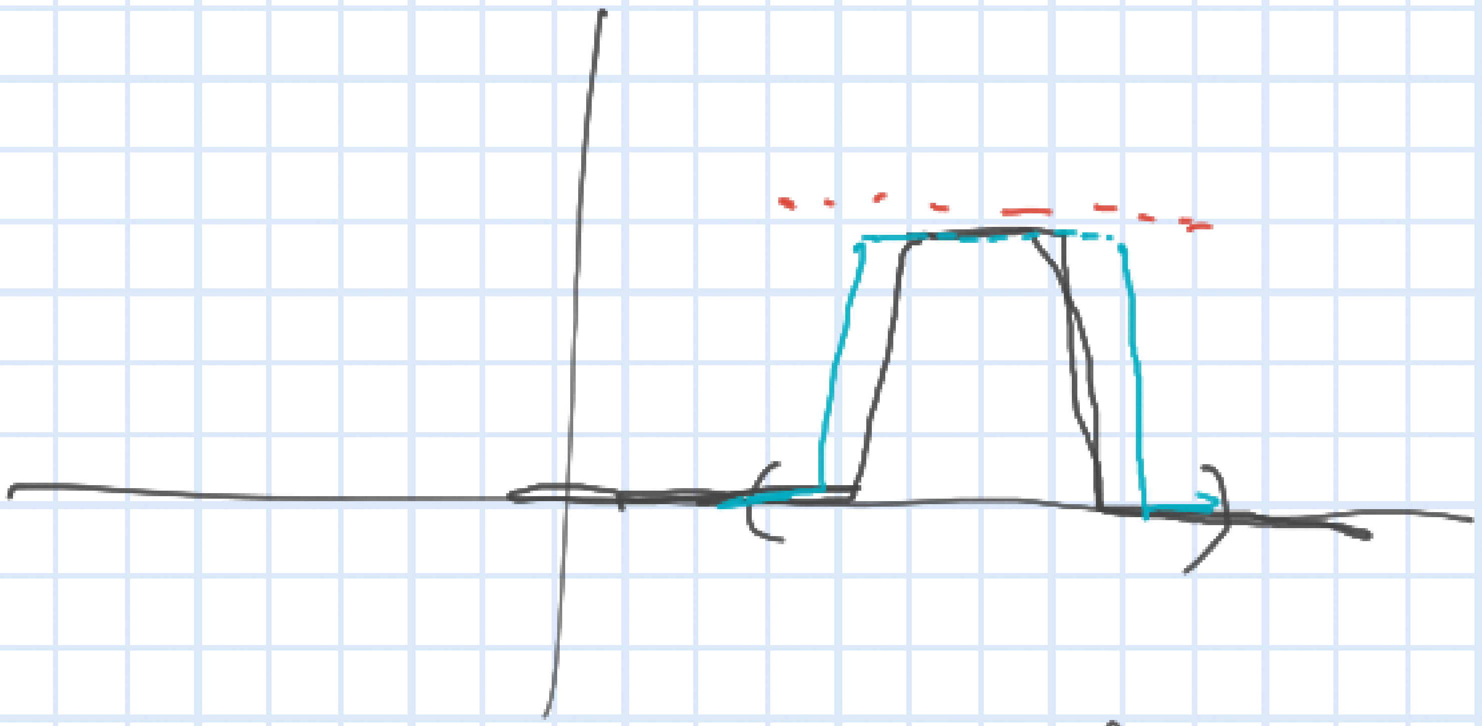
$f_n(x)\le 1$ לכל $x\in\sigma(a)$

ו- $f_n(x)\longrightarrow 1$ לכל $x\in U$

ו- $f_{n+1}\cdot f_n=f_n$

לכל n.

(תרגיל: יש כאלה).



אם מתקיים הקודם, $f_n(a)$ מתכנסים ב-SOT לאופרטור כלשהו p. אבל גם $f_{n+1}(a)\xrightarrow{SOT}p$ ומהרציפות של הכפל המשותפת בכדור היחידה,

$$f_{n+1}(a)f_n(a)\xrightarrow{SOT}p^2$$

$$\shortparallel$$

$$f_n(a)\xrightarrow{SOT}p$$

$\Longleftarrow$ $p^2=p$.