משפטי הדביפנט

אם $\Omega \subseteq B(H)$ קבוצה. הקומוטנט (commutant) של Ω

הוא $\Omega' = \{T \in B(H) \mid Ta = aT \text{ לכל } a \in \Omega\}$

אם Ω סגורה לצמוד, כלומר לכל $a\in\Omega$ גם $a^*\in\Omega$

אז Ω' היא אלגברה C^*.

מדוע? גם כי ההגדרה הזו, ברור ש- Ω' הוא מרחב וקטורי, סגור תחת כפל (כלומר זו אלגברה) וגם סגורה בנורמה.

אם Ω סגורה תחת $*$, אז

אם $T\in\Omega'$ אז לכל $a\in\Omega$,

$$T^*a = (a^*T)^* \underset{\text{כי } a^*\in\Omega'}{=} (Ta^*)^* = aT^*$$

יתר על כן, Ω' סגור ב-WOT,

כי נניח ש- $T_\lambda \xrightarrow{WOT} T$

ו- $T_\lambda\in\Omega'$ לכל λ,

אז לכל $a\in\Omega$, ולכל $\eta, \xi\in H$,

מתקיים ש-

$$\langle \xi, T_\lambda a\eta\rangle \longrightarrow \langle \xi, Ta\eta\rangle$$

$$\|$$

$$\langle \xi, aT_\lambda\eta\rangle$$

$$\|$$

$$\langle a^*\xi, T_\lambda\eta\rangle \longrightarrow \langle a^*\xi, T\eta\rangle = \langle \xi, aT\eta\rangle$$

$$\Rightarrow Ta = aT \Rightarrow T\in\Omega'$$

ט׳ בניסן

הערה:

משפט הקומוטנט הכפול של von Neumann:

נניח ש- $A \subseteq B(H)$ היא $*$-אלגברה עם גרעין טריוויאלי,
כלומר אם $a\xi = 0$ לכל $a \in A$ אז $\xi = 0$. אז $A'' = \overline{A}^{WOT} =$
$= \overline{A}^{SOT}$

$\overline{A}^{SOT} \subseteq \overline{A}^{WOT} \subseteq A''$

הוכחה: מכיוון ש- A'' מכילה את A וסגורה ב- WOT. אז צריך להוכיח ש- $A'' \subseteq \overline{A}^{SOT}$.

אם כן, בהינתן $b \in A''$ ו- $H \ni \xi_1, \dots, \xi_n$
מספיק למצוא $a \in A$ כך ש-

$$\sum_{k=1}^{n} \|(a-b)\xi_k\|^2 < 1$$

מקרה א': $n=1$,
כלומר נתון וקטור ξ, ואנחנו רוצים למצוא $a \in A$ כך ש-
$\|(a-b)\xi\| < 1$.

המרחב $\overline{A\xi} \subseteq H$ הוא תת-מרחב אינווריאנטי, אם p ההטלה על המרחב הזה, אז $pa = ap$ לכל $a \in A$. (מאחר ש- p הטלה על תת-מרחב אינווריאנטי, $ap = pap$ לכל $a \in A$, ולכן מכיוון ש- $a^* \in A$, גם $a^* p = pa^* p$ $\Rightarrow pa = pap \Rightarrow pa = ap$).

אם כן, $p \in A'$ ו

עכשיו, לכל $a \in A$, $a(1-p)\xi = (1-p)a\xi = 0$

$a\xi \in \overline{A\xi}$

לכן, מאחר שהנחנו שהייצוג לא מנוון,

קיבלנו ש- $(1-p)\xi = 0$,

כלומר $\xi = p\xi \in \overline{A\xi}$,

בהתחלה עם "$b \in A'$" נתון.

בפרט $bp = pb$, ולכן

$$b\xi = bp\xi = pb\xi$$

ולכן $b\xi \in \overline{A\xi}$ -

לכן, קיים $a \in A$ כך ש $\|(a-b)\xi\| < 1$ כנדרש.

<u>הטכניקה הבאה:</u> נתונים וקטורים $\xi_1, \dots, \xi_n$

עבור $a \in A$ נסמן

$$\tilde{a} = \begin{pmatrix} a & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a \end{pmatrix} \in B(H^n)$$

נסמן $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in H^n$

נסמן $\tilde{A} = \{\tilde{a} \mid a \in A\}$.

נניח ש- $X = (X_{kl}) \in M_n(B(H)) \cong B(H^n)$

אז $X \in \tilde{A}' \iff X_{kl} \in A'$ לכל k,l.

בפרט, e_{kl} - המטריצה ב- $M_n(B(H))$ שהן 1 במקום k,l ו-0 אחרת נמצאות כולן ב- $\tilde{A}'$.

אז X מתחלפת עם [illegible] כל [illegible]

אז הוא נראה מהצורה

$$X=\begin{pmatrix} y & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & y \end{pmatrix}$$

אם כן, הוכחנו ש-

$$\tilde{A}'' = \widetilde{A''}$$

נפעיל את שורה א' על $\tilde{b}$ ו- $\vec{\xi}$,

ונקבל $a \in A$ כך ש

$$\|(\tilde{a}-\tilde{b})\vec{\xi}\|^2_{H^n} < 1$$

$$\| \\ \sum_{k=1}^{n} \|(a-b)\xi_k\|^2$$

כנדרש

משפט הצפיפות של Kaplansky

נתחיל עם הכנה.

<u>הגדרה:</u> פונקציה רציפה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

תיקרא רציפה חזק אם

לכל רשת T_α ב- $B(H)_{s.a.}$

של אופרטורים צמודים לעצמם,

אם $T_\alpha \xrightarrow{SOT} T$ (=בחזק)

אז $f(T_\alpha) \xrightarrow{SOT} f(T)$.

<u>למה:</u> תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

רציפה, כך שקיים קבוע $C>0$

כך ש $|f(t)| \le C|t|$

לכל $|t|\ge 1$. אז f רציפה חזק.

__הוכחה:__ נסמן ב- Ω את אוסף הפונקציות הרציפות חלק, נסמן Ω^b הפונקציות הרציפות חלק שהן חסומות.

שניהם מרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{R}$.

כמו כן, מאחר ש- $\|f(T)\| \le \|f\|_{\infty}$

יהא f, אם $f_n \in \Omega$ ו- $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ במידה שווה ($\|f - f_n\|_{\infty} \to 0$) אז גם $f \in \Omega$. (למה?)

לכן גם Ω^b סגורה ב- $\|\cdot\|_{\infty}$ (גבול במידה שווה של פונקציות חסומות הוא חסום).

__טענה:__ $\Omega^b \cdot \Omega \subseteq \Omega$

(בפרט, Ω^b הינו אלגברה ממשית)

__הוכחה:__ נניח ש- $f \in \Omega^b$ ו- $g \in \Omega$.

נניח ש- $T_j \xrightarrow{\text{דסל}} T$ כמוגדרים לעצמם.

אז עבור $\xi \in \Xi$, צריך להוכיח ש-

$$\|(f\cdot g)(T_j) - f\cdot g(T)\|_{\xi} \xrightarrow[j]{} 0$$

אך אכן,

$$\|(f\cdot g)(T_j) - f\cdot g(T)\|_{\xi} \le$$

$$\le \|f(T_j)\| \cdot \|(g(T_j) - g(T))\|_{\xi} +$$

$$+ \|(f(T_j) - f(T))\, g(T)\|_{\xi}$$

חסום ע"י $\|f\|_{\infty}$

כנדרש.

טענה 2: $h(t)=\frac{1}{1+t^2} \in \Omega^b$

הוכחה: בהינתן $\omega \xi$, יהי $T_\gamma \to T$,

אז

$\|(h(T_\gamma)-h(T))\xi\| =$

$= \|((1+T_\gamma^2)^{-1}-(1+T^2)^{-1})\xi\|$

$= \|(1+T_\gamma^2)^{-1}(T^2-T_\gamma^2)(1+T^2)^{-1}\xi\|$

$= \|(1+T_\gamma^2)^{-1}(T_\gamma(T-T_\gamma)+(T-T_\gamma)T)(1+T^2)^{-1}\xi\|$

$\le \|(1+T_\gamma^2)^{-1}T_\gamma\| \cdot \|(T-T_\gamma)(1+T^2)^{-1}\xi\| \to 0 \; +$

$+ \|(1+T_\gamma^2)^{-1}\| \cdot \|(T-T_\gamma)\cdot T(1+T^2)^{-1}\xi\| \to 0$

חסום ע"י $\|\frac{x}{1+x^2}\|_\infty$ חסום ע"י $\|\frac{1}{1+x^2}\|_\infty$

לכן כך $\|(h(T_\gamma)-h(T))\xi\| \xrightarrow[\gamma]{} 0$

כנדרש.

טענה 3: נניח ש $f(t)$ רציפה חסומה ויהי $s \in \mathbb{R}$

אז $f_s(t)=f(st)$ רציפה וחסומה גם כן.

(מיידי)

אם כן, מכיוון שראינו ש $\frac{1}{1+t^2}\in\Omega^b$

וגם פונקציית הזהות $t \in \Omega$

$\Longleftarrow$ $\frac{t}{1+t^2}\in\Omega^b$.

ולכן גם לכל s, $\frac{st}{1+s^2t^2}\in\Omega^b$.

הפונקציות האלו מפרידות נקודות.

לכן, מהאמור ב- Ω^b היא אלגברה מתאימה שסגורה בנורמת ∞, וקיבלנו ש- $C_0(\mathbb{R}) \subseteq \Omega^b$,

אם כן, נניח ש- f רציפה וי $f(t) \le C|t|$ לכל $|t|$.

אז $\frac{f(t)}{1+t^2} \in C_0(\mathbb{R}) \subseteq \Omega^b$

ולכן גם $\frac{t f(t)}{1+t^2} \in \Omega^b$

ולכן $\frac{t^2 f(t)}{1+t^2} \in \Omega$

ולכן $f(t) = \frac{f(t)}{1+t^2} + \frac{t^2 f(t)}{1+t^2} \in \Omega$ כנדרש

משפט הצפיפות של קפלנסקי:

נניח ש- $A \subseteq B(H)$ היא אלגברת C^* עם גרעין טריוויאלי.

אז כדור היחידה של A צפוף חזק בכדור היחידה של A''.

כדור היחידה של האיברים הצמודים לעצמם ב- A צפוף חזק בכדור היחידה של האיברים הצמודים לעצמם ב- A''

כדור היחידה של האיברים האוניטריים ב- A צפוף חזק בכדור היחידה של האיברים האוניטריים ב- A''.

הוכחה: נתחיל במקרה הצמוד לעצמו.

נניח ש- $b=b^* \in A''$.

ממשפט הקומוטנט הכפול, יש רשת $a_\gamma \in A$ כך ש- $a_\gamma \xrightarrow[\gamma]{WOT} b$

מכיוון שפעולת הכוכב רציפה, גם $a_\gamma^* \xrightarrow[\gamma]{WOT} b$

$\Leftarrow$ $\frac{1}{2}(a_\gamma + a_\gamma^*) \xrightarrow[\gamma]{} b$

אז $b \in \overline{A_{s.a.}}^{WOT}$

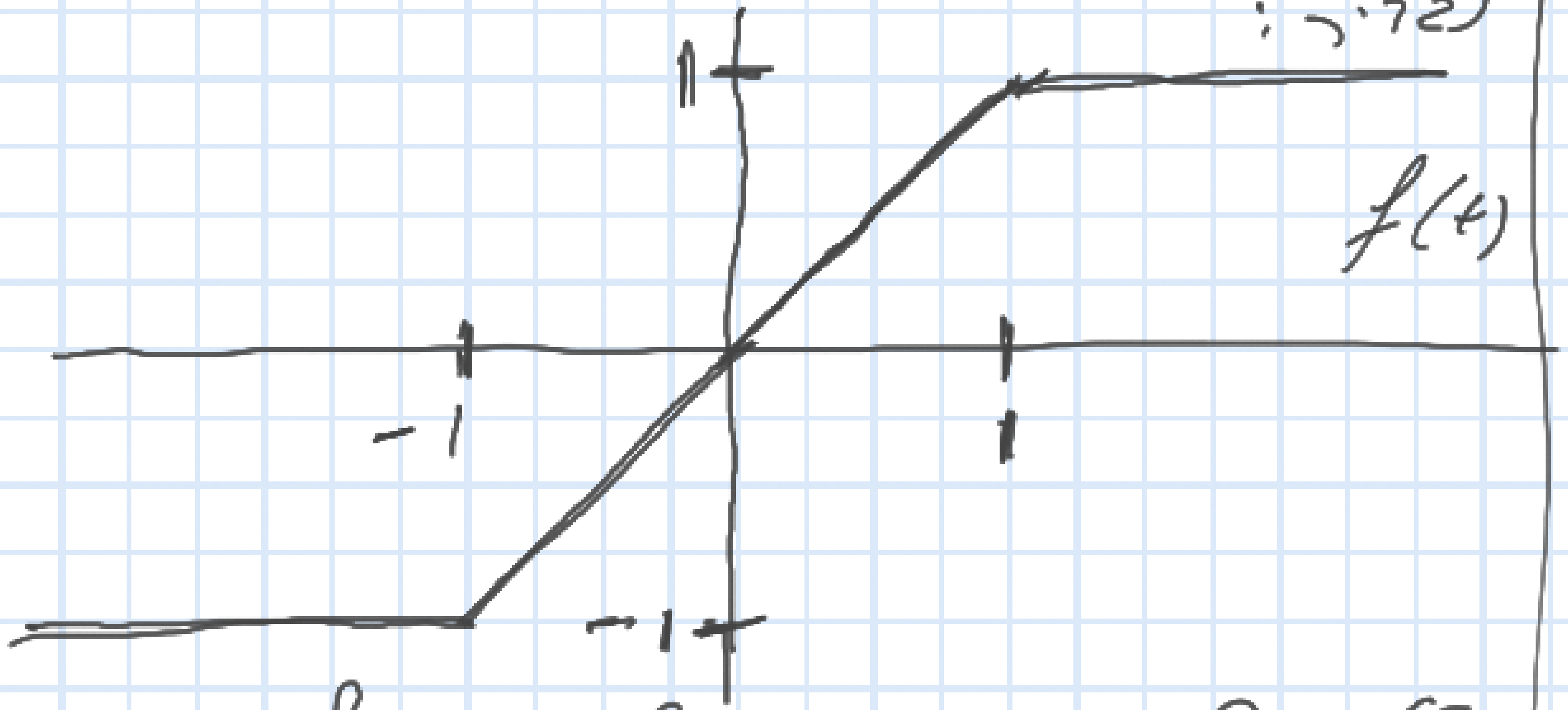
ומאחר ו- $\overline{A_{s.a.}}^{WOT}$ קמורה וסגורה, $\overline{A_{s.a.}}^{WOT} = \overline{A_{s.a.}}^{SOT}$

$\Leftarrow$ $b \in \overline{A_{s.a.}}^{SOT}$

לכן, אפשר לבחור רשת $a_\gamma \in A_{s.a.}$ כך ש- $a_\gamma \xrightarrow[\gamma]{SOT} b$.

נניח ש- $\|b\| \le 1$. אנחנו רוצים להראות שניתן לבחור את a_γ כך ש- $\|a_\gamma\| \le 1$ לכל γ.

נגדיר:

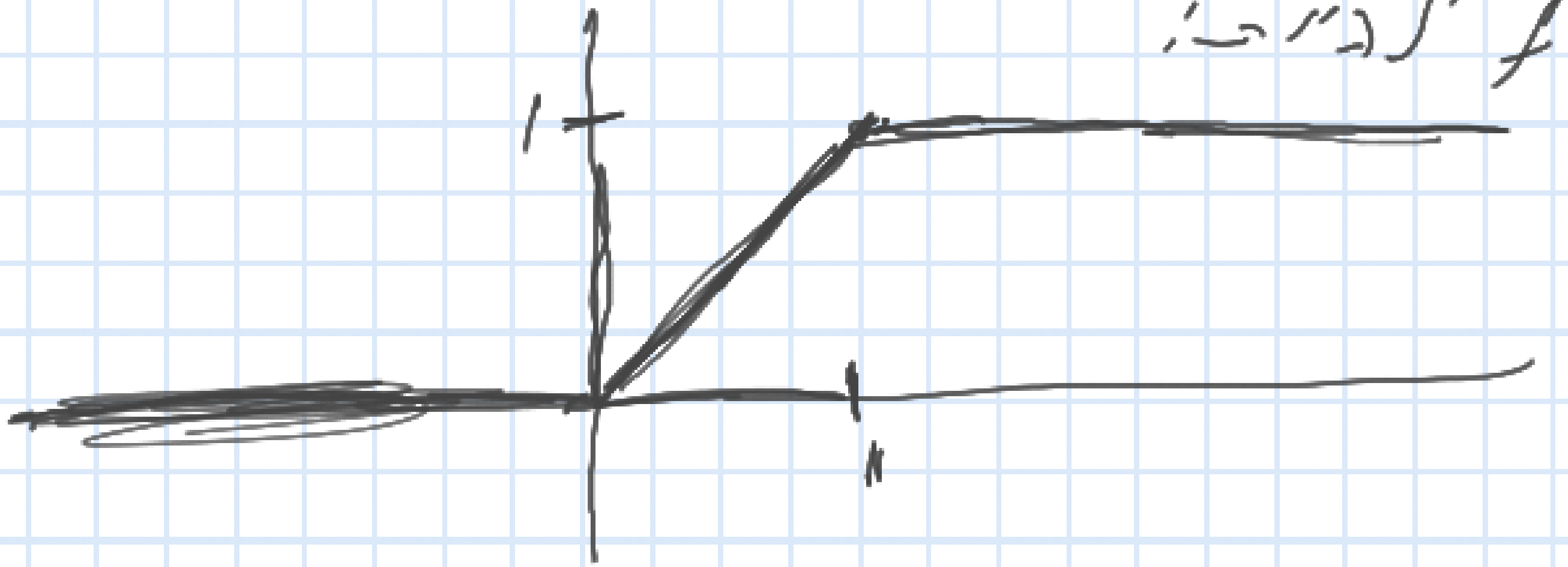


אז f רציפה חסומה, ולכן $f(a_\gamma) \xrightarrow{SOT} f(b) = b$

ו- $\|f(a_\gamma)\| \le \|f\|_\infty = 1$.

כנדרש.

כמו במקרה הקודם (ג'ה חיובי),
אז נבחר פונקציה ו-f הקודמת את
f להיות:



ואז $f(a_\lambda)\geq 0$, $f(a_\lambda)\xrightarrow{SOT} b$
מאותו השיקול.

אם b לא צמוד לעצמו, אז
נגדיר

$$C=\begin{pmatrix}0&b\\b^*&0\end{pmatrix}\in M_2(A'')=$$
$$=M_2(\overline{A}^{SOT})=\overline{M_2(A)}^{SOT}$$
למה?
$$=M_2(A)''$$

אז c צמוד לעצמו, ו-$\|c\|\le 1$

אז יש $d_\lambda\in M_2(A)_{s.a.}$ בכדור היחידה,
כך ש- $d_\lambda\xrightarrow[\lambda]{SOT} c$

נסמן
$$d_\lambda=\begin{pmatrix}d_{11}(\lambda)&d_{12}(\lambda)\\d_{21}(\lambda)&d_{22}(\lambda)\end{pmatrix}$$

אז בפרט, $d_{12}(\lambda)\xrightarrow[\lambda]{SOT} b$

! ו-$\|d_{12}(\lambda)\|\le 1$ לכל λ, כנדרש.