יש להגיש את הפתרונות עד יום חמישי בשעה 17:30 בשבוע שאחרי זה בו המטלה ניתנה. מותר לפתור ולהגיש בזוגות.

שאלות להגשה

1. אם $\mathcal{M}$ מבנה עבור חתימה Σ, ו-ϕ, ψ נוסחאות בחתימה זו, הוכח:
   (א) $(\forall x{\in}a\phi)^{\mathcal{M}}$ היא קבוצת כל ההשמות עבור $\mathscr{V}(\phi) \setminus \{x\}$ שכל הרחבה שלהן ל-x שייכת ל-$\phi^{\mathcal{M}}$.
   (ב) $(\exists x\langle\phi \to \psi\rangle)^{\mathcal{M}} = \langle\forall x\phi \to \exists x\psi\rangle^{\mathcal{M}}$

2. תהי ϕ הנוסחא $\forall y\exists z\langle y = z + z \vee y = z + z + x\rangle$ (בחתימה עם סימן פונקציה דו-מקומי $+$ ושוויון). תאר את הקבוצה $\phi^{\mathcal{M}}$, כאשר $\mathcal{M}$ הוא המבנה עם שוויון $(\mathbb{Z}, +)$. הראה שהתיאור נכון, על-ידי תאור הקבוצות והפונקציות המופיעות בכל שלבי ההגדרה. מהי הקבוצה שאותה נוסחא מגדירה ב-$(\mathbb{Z}^2, +)$?

3. נניח ש-Σ חתימה ו-$\mathscr{V}$ קבוצת משתנים, ונניח ש-U היא פונקציה מקבוצת הביטויים מעל Σ (כלומר, שמות העצם והנוסחאות מעל Σ ו-$\mathscr{V}$) למספרים השלמים המקיימת:
   1. $U(\bot) = 11$
   2. לכל משתנה $x \in \mathscr{V}$, $U(x) = 5$
   3. לכל סימן פונקציה n-מקומי f, ולכל סדרת שמות עצם $t_1, \dots, t_n$ (מהסוגים המתאימים), $U(f(t_1, \dots, t_n)) = (\sum_i U(t_i)) + n - 1$
   4. לכל סימן יחס n-מקומי R, ולכל $t_1, \dots, t_n$ (מהסוגים המתאימים), $U(R(t_1, \dots, t_n)) = (\sum_i U(t_i)) - 2n + 2$
   5. לכל שתי נוסחאות ϕ ו-ψ מתקיים $\langle\phi \to \psi\rangle = U(\phi) - U(\psi) + 8$
   6. לכל נוסחה ϕ, לכל סוג a ולכל משתנה x מתקיים $U(\exists x{\in}a\phi) = U(\phi) - 9$

   (א) הוכיחו שיש לכל היותר פונקציה U אחת המקיימת את התנאים הללו
   (ב) הוכיחו שלא קיים פסוק ϕ המקיים $U(\phi) = 2017$