תאריך הבחינה:	21 בפברואר 2018
שם המרצה:	משה קמנסקי
שם הקורס:	לוגיקה
מספר הקורס:	201.1.6061
שנה: 2018	סמסטר: א' מועד: ב'
משך הבחינה:	שלוש שעות
חומר עזר:	דף נוסחאות (מצורף)

לוגיקה—מבחן מסכם

כל שאלה שווה 36 נקודות. ניתן לפתור כל חלק של השאלות, אבל אי אפשר לקבל יותר מ-100. מותר להשתמש בכל הטענות המוכחות ברשימות. *כל המבנים והחתימות הם עם שוויון, אלא אם צויין אחרת.* בהצלחה!

1. נסמן ב-Σ את החתימה החד-סוגית עם פעולה דו-מקומית $+$ וסימן קבוע 0. לכל $n > 1$ טבעי, נסמן ב-$\mathbb{Z}_n$ את המבנה שעולמו $\{0, \dots, n-1\}$, והפירוש של $+$ בו הוא חיבור מודולו n.

(א) לכל k טבעי, נסמן ב-$t_k : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ את הפונקציה $t_k(x) = kx$ (כפל מודולו n). הוכיחו שלכל k יש נוסחה שמגדירה את t_k בכל $\mathbb{Z}_n$, ושיש פסוק ϕ_k שאומר ש-t_k חד-חד-ערכית. הראו גם ש-ϕ_k תקף ב-$\mathbb{Z}_n$ אם ורק אם t_k גם על $\mathbb{Z}_n$, אם ורק אם k ו-n זרים.

פתרון: הפונקציה t_k מוגדרת על-ידי $y = x + \dots + x$ (סכום k פעמים). הפסוק ϕ_k נתון על-ידי: $\forall x(\langle x + \dots + x = 0 \to x = 0 \rangle)$. הפונקציה חד-חד-ערכית אם ורק אם היא על, לפי עקרון שובך יונים, כי $\mathbb{Z}_n$ סופית. נניח ש-n ו-k זרים, וש-$t_k(x) = 0$. אז kx מתחלק ב-n, אבל k זר ל-n, אז x מתחלק ב-n. הואיל ו-$x \in \mathbb{Z}_n$, מתחייב ש-$x = 0$. לכן, אם $t_k(x) = t_k(y)$, אז $t_k(x-y) = 0$, ולכן $x = y$. בכיוון השני, אם p מחלק משותף של k ו-n, אז $t_k(\frac{n}{p}) = \frac{k}{p}n = 0$ אז ל-0 ול-$\frac{n}{p}$ אותה תמונה תחת t_k.

(ב) נסמן ב-$\mathbb{T}_1$ את קבוצת הפסוקים (ב-Σ) שנכונים ב-$\mathbb{Z}_n$ לכמעט כל n (כלומר, פרט למספר סופי). הוכיחו ש-$\mathbb{T}_1$ אינה שלמה

פתרון: הפסוק ϕ_2 תקף ב-$\mathbb{Z}_n$ בדיוק כאשר n זוגי. לכן ϕ_2 ו-$\neg\phi_2$ שניהם לא נמצאים ב-$\mathbb{T}_1$.

(ג) נסמן ב-$\mathbb{T}_2$ את קבוצת הפסוקים שנכונים ב-$\mathbb{Z}_p$ לכמעט כל *ראשוני* p. הוכיחו שהפסוקים ϕ_k שייכים ל-$\mathbb{T}_2$ לכל $k > 0$.

פתרון: הפסוק ϕ_k תקף בכל $\mathbb{Z}_p$ עבורו $k < p$ (כי אז p ו-k זרים), ולכן לכמעט כל p.

(ד) הוכיחו ש-$\mathbb{T}_2$ עקבית ושלמה (*רמז:* מה אפשר לומר על מבנה בו כל הפסוקים ϕ_k תקפים?)

פתרון: $\mathbb{T}_2$ עקבית לפי קומפקטיות, כי לכל תת-קבוצה סופית שלה יש מודל. ראינו ש-$\mathbb{T}_2$ כוללת את ϕ_k לכל $k > 0$. לכן, כל מודל של $\mathbb{T}_2$ הוא (באופן יחיד) מרחב וקטורי מעל $\mathbb{Q}$. ראינו שהתורה של מרחבים כאלה היא קטגורית בכל עוצמה שאינה בת-מניה, ולכן שלמה.

2. תהי Σ החתימה עבור גרפים, כלומר, בעלת סוג אחד V וסימן יחס דו-מקומי E. נזכיר שגרף הוא מבנה עבור חתימה זו שבו E סימטרי ואנטי-רפלקסיבי. לכל אחת ממחלקות הגרפים הבאות, החליטו (והוכיחו) האם היא מחלקה אלמנטרית (כלומר, האם קיימת תורה $\mathbb{T}$ שזו מחלקת כל המודלים שלה)

(א) גרפים חסרי מעגלים

פתרון: כן: לכל $n>1$ נסמן ב-$\psi_n(x_1,\dots,x_n)$ את הנוסחה

$$\bigwedge_{0<i<n}(E(x_i,x_{i+1})\wedge\bigwedge_{i<j\leq n}x_i\neq x_j)$$

שאומרת שה-x_i-מהווים מסלול פשוט. אז התורה כוללת לכל $n>2$ את הפסוק ϕ_n שאומר שאין מעגל באורך n:

$$\forall x_1,\dots,x_n\neg(\psi_n(x_1,\dots,x_n)\wedge E(x_1,x_n))$$

(ב) גרפים שיש בהם מעגל

פתרון: לא: נניח בשלילה שיש תורה $\mathbb{T}$ כזו. לכל n, התורה $\mathbb{T}\cup\{\phi_k\mid 2<k<n\}$ (כאשר ϕ_k מהסעיף הקודם) היא ספיקה, כי המעגל בגודל $n+1$ הוא מודל. לפי משפט הקומפקטיות התורה $\mathbb{T}\cup\{\phi_k\mid k>2\}$ היא ספיקה, אבל זו סתירה.

(ג) גרפים קשירים (כלומר שקיים מסלול בין כל שני צמתים)

פתרון: לא: נניח בשלילה ש-$\mathbb{T}$ תורה כזו. נוסיף לחתימה שני סימני קבועים a,b. אם θ_n הוא הפסוק

$$\forall x_1,\dots,x_n\neg\psi_n(a,x_1,\dots,x_n,b)$$

אז לכל $n\geq 0$, התורה $\mathbb{T}\cup\{\theta_k\mid k<n\}$ ספיקה, שוב כי המעגל בגודל n הוא מודל. אבל $\mathbb{T}\cup\{\theta_k\mid k>0\}$ לא ספיקה, כי ביחד הפסוקים אומרים שאין מסלול מ-a ל-b. זו סתירה לקומפקטיות.

3. אילו מהקבוצות הבאות גדירות ב-$\mathbb{N}$ בשפה של $\mathbb{PA}$? (הוכיחו!)

(א) קבוצת מספרי הגדל $\ulcorner\phi(x)\urcorner$ של נוסחאות $\phi(x)$ עבורן $\ulcorner\neg\phi\urcorner\in\phi^{\mathbb{N}}$ (*רמז:* ההעתקה $\ulcorner\phi\urcorner\mapsto\ulcorner\neg\phi\urcorner$ היא גדירה)

פתרון: לא. אחרת, נניח שהיא גדירה על ידי נוסחה $\psi_0(x)$. אז הקבוצה $\{\ulcorner\neg\phi\urcorner\mid\ulcorner\phi\urcorner\in\psi_0^{\mathbb{N}}\}$ גם גדירה, על-ידי נוסחה $\psi(x)$ (הפעולה של הוספת סימן שלילה היא גדירה). עבור המקרה $\phi=\neg\psi$, מקבלים: $\ulcorner\neg\phi\urcorner\in\psi^{\mathbb{N}}$ אם ורק אם $\ulcorner\neg\phi\urcorner\in(\neg\phi)^{\mathbb{N}}$ (שכן $\neg\phi$ שקולה ל-ψ), אם ורק אם $\ulcorner\neg\phi\urcorner\notin\phi^{\mathbb{N}}$, אם ורק אם $\ulcorner\neg\phi\urcorner\notin\psi^{\mathbb{N}}$ (לפי הגדרת ψ), וזו סתירה.

(ב) קבוצת המטריצות שהן מכפלה של המטריצות $T=\left[\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right]$ ו-$S=\left[\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right]$ מספר כלשהו של פעמים (כתת-קבוצה של $\mathbb{N}^4$)

פתרון: כן, אם A_n קבוצת המכפלות של n גורמים כאלה, אז $A_0 = \{\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]\}$, ולכל n אפשר לרשום $A_{n+1} = \{M \mid \exists N \in A_n(M = NT \vee M = NS)\}$. לפי משפט הרקורסיה, הסדרה הזו מוגדרת באחידות על-ידי קבוצה A, והקבוצה הנדרשת היא $\{M \mid \exists k(A(k,M))\}$.

(ג) קבוצת מספרי הגדל של פסוקים שקיים מודל של $\mathbb{PA}$ בו הם תקפים (*רמז:* מה אפשר לומר על הפסוקים שמספר הגדל שלהם לא נמצא בקבוצה זו?)

פתרון: כן: המשלימה של קבוצה זו היא קבוצת מספרי גדל של פסוקים ϕ שאינם תקפים באף מודל של $\mathbb{PA}$. זה שקול לטענה ש-$\neg\phi$ נובע מ-$\mathbb{PA}$, וראינו שהקבוצה הזו גדירה, וכך גם שלילת פסוק.