

# אלגברה לינארית להנדסת מכונות, בוחן אמצע.

## אוניברסיטת בן גוריון

<p>כללים: אסור לכתוב בצבע אדום.  הבודק רוצה לראות רק את הגרסה הסופית של הפתרון, לא את כל נדודי הביניים. השתמשו בטיוטה לכל הנסיונות ההתחלתיים. הפתרון אמור להיות מסודר, מדויק (ולא ארוך).  בזמן הבחינה מרצים/מתרגלים עונים רק על שאלות הקשורות לניסוח של הבחינה. אנחנו לא עונים על שאלות כמו: "האם זאת דרך נכונה?", "באיזה משפט צריכים להשתמש כאן?", "אני שכחתי את הנוסחה/הניסוח של..".</p>	<p>מספר הקורס: 201.1.3721  מרצה: ד.קרנר  מתרגלים: י.דיקשטיין, א.פלד  תאריך: 09.06.2016  משך הבחינה: 3 שעות  ניקוד: פתרו את כל השאלות (סה"כ 100 נקודות)  אין להשתמש בכל חומר עזר, לרבות מחשבוני</p>
--	--

יש לנמק היטב את כל התשובות.

$$(1) \quad (א) \quad (8) \quad \text{חשבו: } \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - i\right)^{24}}{\left(1 - \frac{i}{\sqrt{3}}\right)^{36}}$$

(ב) (17) יהי  $V$  מרחב וקטורי של כל הפונקציות,  $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ . מצאו את המימד של התת-מרחב הקטן ביותר של  $V$  שמכיל את האיברים הבאים:  $\sin(x+1)$ ,  $\cos(x-1)$ ,  $\sin(x+\sqrt{2})$ ,  $\cos(x+\ln(2))$ .

$$(2) \quad (א) \quad (15) \quad \text{עבור אילו ערכים של פרמטרים } a, b \in \mathbb{Q} \text{ למערכת} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ b \\ a^2 \end{bmatrix}$$

יש פתרון אחד? מספר סופי (ולא אפס) של פתרונות? אינסוף פתרונות? אין אף פתרון?

(ב) (15) באילו מהמקרים הבאים  $V$  הוא תת-מרחב וקטורי?

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{כאן } V = \{A \mid C^2 AB^{-2} = BA^t C\} \subseteq M_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \quad \text{i.}$$

ii.  $V = \{ \text{כל הסדרות של מספרים ממשיים, } a_1, a_2, \dots, \text{ כל הסדרות המתכנסות ל } 1 \}$

$$(3) \quad (א) \quad (15) \quad \text{נגדיר מרחבים וקטוריים: } V = \left\{ A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{C}) \mid A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$M_{3 \times 3}^{up}(\mathbb{C}) = \{A \mid a_{ij} = 0, i > j\} \quad \text{מצאו בסיס של תת-מרחב } V \cap M_{3 \times 3}^{up}(\mathbb{C})$$

(ב) (10) נסמן שורות של מטריצה  $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  ע"י  $L_1, L_2$ . נניח ש  $\sqrt{3}L_1 + \ln(3)L_2 = (2, 1)$  ו  $\ln(3)L_1 + \sqrt{3}L_2 = (1, 2)$  האם  $A$  בהכרח הפיכה? (הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמא נגדית)

(4) תהי  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{Z}_{11})$ . הוכיחו/הפריכו (ע"י דוגמא נגדית)

(א) (10) אם  $\det(A) \neq 0$  אז  $A$  שקולת שורה ל  $A^t$

(ב) (10) אם  $\det(A) = 0$  אז  $A$  שקולת שורה ל  $A^t$

בהצלחה!

נוסחאות שימושיות:  $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ ,  $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$ ,  $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}, \cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta), \sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \sin(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ln(1+x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$