אלגברה לינארית להנדסת מכונות, בחינה מועד א.

אוניברסיטת בן גוריון

מספר הקורס: 201.1.9321 מרצה: ד.קרנר מתרגלים: י.דיקשטיין, א.פלד תאריך: 19.07.2016 משך הבחינה: 3 שעות ניקוד: פתרו את כל השאלות (סה"כ 100 נקודות) אין להשתמש בכל חומר עזר, לרבות מחשבונים	כללים : אסור לכתוב בצבע אדום. הבודק רוצה לראות רק את הגרסה הסופית של הפתרון, לא את כל נדודי הביניים. השתמשו בטיוטה לכל הנסיונות ההתחלתיים. הפתרון אמור להיות מסודר, מדויק (ולא ארוך). בזמן הבחינה מרצים/מתרגלים עונים רק על שאלות הקשורות לניסוח של הבחינה. אנחנו לא עונים על שאלות כמו: "האם זאת דרך נכונה?" , "באיזה משפט צריכים להשתמש כאן?", "אני שכחתי את הנוסחה/הניסוח של..".

יש לנמק היטב את כל התשובות.

(1) (א) (5) חשבו: $(1-i)^{14}$.

(ב) (10) בהינתן $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ cos(\frac{\pi}{6}) & 0 & sin(\frac{\pi}{6}) \\ sin(\frac{\pi}{6}) & 0 & cos(\frac{\pi}{6}) \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} cos(\frac{2\pi}{3}) & sin(\frac{2\pi}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ sin(\frac{2\pi}{3}) & cos(\frac{2\pi}{3}) & 0 \end{bmatrix}$, חשבו את הדטרמיננט של AB.

(2) תהי $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^2$ העתקת שיקוף ביחס לישר $y = \sqrt{3} \cdot x$.

(א) (10) מצאו את המטריצה המייצגת של T בבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$. רשמו את הנוסחה עבור פעולה של T (כלומר $T(x,y) = \ldots$)

(ב) (10) מצאו את הערכים העצמיים ווקטורים עצמיים של T, ואת הריבויים האלגבריים/גאומטריים המתאימים.

(ג) (10) האם T ניתנת ללכסון? אם כן, מצאו בסיס מלכסן של T ואת המטריצה המייצגת בבסיס זה.

(3) הוכיחו/הפריכו (ע"י דוגמא נגדית)

(א) (15) עבור העתקות לינאריות $V \xrightarrow{T} W \xrightarrow{S} V$, נניח ש S חח"ע ו T על. אז $S \circ T$ חח"ע או על.

(ב) (15) בהינתן מטריצות $A, B \in M_{3\times3}(\mathbb{Q})$ נניח ש λ_A הנו ערך עצמי של A ו λ_B הנו ערך עצמי של B.
אז $\lambda_A\lambda_B$ הנו ערך עצמי של לפחות אחת ממטריצות AB, BA.

(4) נגדיר העתקה $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^3$ ע"י $T(x,y,z) = (x-2y, y-2z, 2x-8z)$.

(א) (5) מצאו $dim(Im(T))$, $dim(ker(T))$.

(ב) (20) מצאו בסיסים אורתונורמליים של $ker(T)$, $Im(T)$. (ביחס למכפלה פנימית סטנדרטית על $\mathbb{R}^3$.)

בהצלחה!

נוסחאות שימושיות: $sin^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$, $sin(2\alpha) = 2sin(\alpha)cos(\alpha)$, $cos(2\alpha) = cos^2(\alpha) - sin^2(\alpha)$

$sin(\alpha+\beta) = sin(\alpha)cos(\beta) + cos(\alpha)sin(\beta)$, $cos(\alpha+\beta) = cos(\alpha)cos(\beta) - sin(\alpha)sin(\beta)$, $\sum\limits_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$,

$(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, $ln(1+x) \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$, $sin(x) \sim \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $cos(x) \sim \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.