

אלגברה לינארית להנדסת מכונות, בחינה מועד ג.

אוניברסיטת בן גוריון

<p>כללים: אסור לכתוב בצבע אדום. הבודק רוצה לראות רק את הגרסה הסופית של הפתרון, לא את כל נדודי הביניים. השתמשו בטיוטה לכל הנסיונות ההתחלתיים. הפתרון אמור להיות מסודר, מדויק (ולא ארוך). בזמן הבחינה מרצים/מתרגלים עונים רק על שאלות הקשורות לניסוח של הבחינה. אנחנו לא עונים על שאלות כמו: "האם זאת דרך נכונה?", "באיזה משפט צריכים להשתמש כאן?", "אני שכחתי את הנוסחה/הניסוח של..".</p>	<p>מספר הקורס: 201.1.9321 מרצה: ד.קרנר מתרגלים: י.דיקשטיין, א.פלד תאריך: 15.09.2016 משך הבחינה: 3 שעות ניקוד: פתרו את כל השאלות (סה"כ 100 נקודות) אין להשתמש בכל חומר עזר, לרבות מחשבוני</p>
---	--

יש לנמק היטב את כל התשובות.

(א) (1) $a, b \in \mathbb{R}$, $a + bi$ מצאו את ההצגה $\sqrt{1 - i\sqrt{3}}$ עבור הביטוי

(ב) (10) נגדיר אופרטור $T_A: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ ע"י $T_A(v) = A \cdot v$, כאשר $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix}$ מצאו את $\dim(\ker(T_A) \cap \text{Im}(T_A))$

(2) נגדיר אופרטור לינארי על $M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ ע"י $T \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$
 (א) (10) מצאו בסיסים ל $\ker(T)$, $\text{Im}(T)$
 (ב) (15) האם T ניתן לכסוף? אם כן, מצאו בסיס מלכסן וצורה אלכסונית של T בבסיס הזה.

(3) יהי $V \subset \mathbb{R}^4$ תת מרחב ממימד שלוש. נניח ש $V \oplus V_1 = \mathbb{R}^4$ וגם $V \oplus V_2 = \mathbb{R}^4$. הוכיחו/הפריכו (ע"י דוגמא נגדית)
 (א) (10) $\dim(V_1 \cap V_2) \geq 1$
 (ב) (15) $\dim(V_1 + V_2) \leq 2$

(4) (א) (15) נתון מרחב וקטורי $\mathbb{R}_{\leq 4}[x]$ עם מכפלה פנימית $\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$
 נגדיר $V = \{p(x) \mid p'(0) = 0 = p''(0)\} \subset \mathbb{R}_{\leq 4}[x]$ מצאו בסיס אורתונורמלי ל V .
 (ב) (10) נתון מרחב וקטורי $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ עם מכפלה פנימית $\langle A, B \rangle = \text{trace}(AB^t)$
 נגדיר $W = \{A \mid \text{trace}(A) = 0\} \subset M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ מצאו בסיס ל W^\perp .

בהצלחה!

נוסחאות שימושיות: $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$, $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$
 $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$, $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$, $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$
 $\cos(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$, $\sin(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\ln(1+x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$