אלגברה לינארית להנדסת מכונות, 201.1.3721

אביב 2016 (מרצה: ד.קרנר)

תרגיל בית מס' 1.

(1) חשבו i^{97}, i^{4n}, i^{4n+3}, i^n (כאן $n \in \mathbb{Z}$).

(2) יהי $z = x + iy \neq 0$ כאשר $x, y \in \mathbb{R}$. חשבו את המספרים:

i. $Re(\frac{1}{z})$, ii. $Im(\frac{1}{z^2})$, iii. $Re(z^2 + z)$, iv. $Re(-iz^2)$.

(3) בהינתן $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = 2 + 4i$, חשבו את המספרים הבאים: $z_1 \pm z_2$, z_1^2, $(1+i)z_1$, z_2^3, $\frac{z_1}{z_2}$, $\frac{z_2^2}{z_1}$, $\frac{z_2}{1-2i}$.

(4) מצאו את ההצגה $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ עבור ביטויים הבאים:

i. $(1-i)^{105}$, ii. $(2+3i)^{-47}$, iii. $(8+i)^{-152}$, iv. $\sqrt{2-i}$, v. $\sqrt{c+i}$, vi. $\frac{1}{i+\frac{1}{i+\frac{1}{1+i}}}$.

(5) (א) מצאו את $z \in \mathbb{C}$ המקיים $|z| + z = 2 + i$.

(ב) מצאו $x, y \in \mathbb{R}$ המקיימים: $(2+i)x + (1+2i)y = 1 - 4i$.

(ג) מצאו $x, y \in \mathbb{R}$ המקיימים: $(x+iy)^2 = i$.

(6) הוכיחו כי $x_{\pm} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}$ הנם שורשים של המשוואה $x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, כאן $a_1, a_0 \in \mathbb{C}$.

(7) הציגו את המספרים הבאים בקואורדינטות קוטביות:

i. -2, ii. $2i$, iii. $-2i$, iv. $1+i$, v. $1-i$, vi. $-1+i\sqrt{3}$, vii. $\sqrt{3}-i$, viii. $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$.

(8) פתרו את המשוואות: i. $z^4 = 2 - i\sqrt{12}$, ii. $\overline{z} = 2 - z$, iii. $z^2 = \overline{z}$, iv. $|z| + z = 1 - i$.

(9) יהי $n \in \mathbb{N}$. מצאו את כל הפתרונות של המשוואה $z^n = 1$.

(10) יהיו $z, w \in \mathbb{C}$. הוכיחו או הפריכו (בעזרת דוגמא נגדית):

(א) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$

(ב) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

(ג) עבור כל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים: $z^4 + 4 = (z-1-i)(z-1+i)(z+1+i)(z+1-i)$.

(ד) $\overline{z} = z$ אמ"ם $z \in \mathbb{R}$.

(ה) יהיו $a_0, a_1, \ldots, a_n, z \in \mathbb{C}$ כך שמתקיים: $\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = 0$. אזי: $\sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z}^k = 0$.

(ו) יהיו $z \in \mathbb{C}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים: $\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = 0$. אזי: $\sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z}^k = 0$.

(11) יהיו z_1, z_2, z_3 מספרים מרוכבים שונים המקיימים: $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. הוכיחו שהמשולש עם קודקודים ב z_1, z_2, z_3 הנו משולש שווה צלעות.

(12) נניח ש z_1, z_2, z_3 מקיימים $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. הוכיחו כי $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3|$.

(13) תארו באופן גרפי את קבוצות הנקודות ב $\mathbb{R}^2$ המקיימות את התנאים:

i. $|z| = 1$, ii. $|z-1| = 2$, iii. $|z-1+2i| = 1$, iv. $|z-1| \leq |z-5|$, v. $|z-1| + |z-5| < 4$.

(14) חשבו את כל ההפכים תחת הכפל של איברי $\mathbb{Z}_7$ השונים מ $\overline{0}$.

(15) הוכיחו כי הקבוצה $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} |\ a, b \in \mathbb{Q}\}$ הנה שדה ביחס לפעולות חיבור וכפל הרגילות.

(16) עבור כל אחת מקבוצות המספרים הבאות הסבירו למה היא לא שדה:

i. $\mathbb{Z}_4$, ii. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, iii. $\{iy |\ y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$, iv. $\{x + iy |\ x, y \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}^2$.

(17) במקרים הבאים $a, b \in \mathbb{F}$. מצאו את ההופכי של a ופתרו את המשוואה $ax = b$:

i. $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $a = 5 + 2i$, $b = 1 - i$. ii. $\mathbb{F} = \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$, $a = 1 + 2\sqrt{3}$, $b = 1 - \sqrt{3}$. iii. $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_7$. $a = \overline{3}$, $b = \overline{4}$.

(18) הוכיחו/הפריכו (ע"י דוגמא נגדית):

i. אם $z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}$ אז $z \in \mathbb{R}$. ii. אם $z^2 \in \mathbb{R}$ וגם $z + \overline{z} \in \mathbb{R}$ אז $z \in \mathbb{R}$.

iii. אם $z \neq 0$ ו- $\frac{z}{\overline{z}} \in \mathbb{R}$ אז $z \in \mathbb{R}$ או $iz \in \mathbb{R}$.

(19) הוכיחו כי לכל $-1 \neq z \in \mathbb{C}$ קיים $t \in \mathbb{C}$ כך ש $z = \frac{1+ti}{1-ti}$. הוכיחו כי $|z| = 1$ אמ"ם $t \in \mathbb{R}$.

(20) הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים: $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}} \left(cos\frac{\pi n}{4} + i \cdot sin\frac{\pi n}{4} \right)$.

(21) מצאו נוסחה סגורה עבור סכומים הבאים:

i. $1 + cos(x) + cos(2x) + \cdots + cos(nx)$, ii. $sin(x) + sin(2x) + \cdots + sin(nx)$.

(רמז: כדאי להשתמש בנוסחת DeMoivre ובסדרה הנדסית.)

(22) יהי $\mathbb{F}$ שדה סופי.

(א) הוכיחו כי קיים מספר $n \in \mathbb{N}$ כך ש: $\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n} = 0$. הטבעי החיובי הקטן ביותר כזה נקרא "המאפיין של $\mathbb{F}$".

(ב) הוכיחו כי המאפיין של $\mathbb{F}$ הנו תמיד מספר ראשוני.