אלגברה לינארית להנדסת מכונות, 201.1.3721

אביב 2016 (מרצה: ד.קרנר)

תרגיל בית מס' 10.

(1) מצאו את הערכים העצמיים ואת המרחבים העצמיים המתאימים של האופרטורים הבאים. בדקו האם הם ניתנים ללכסון.
i. $\mathbb{C}^3 \xrightarrow{T} \mathbb{C}^3$, $T(x,y,z)=(x+y,y+x,+z)$, ii. $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{S} \mathbb{R}^2$, $S(x,y)=(x+y,x-y)$,
iii. $\mathbb{C}^4 \xrightarrow{T} \mathbb{C}^4$, $T(x,y,z,w)=(y,2z,3w,0)$, iv. $\mathbb{Z}_2^4 \xrightarrow{S} \mathbb{Z}_2^4$, $S(x,y,z,w)=(x+z,-2x-y,y+w,y-w)$.

(2) תהי A מטריצה עם רכיבים ב $\mathbb{C}$. נניח שהפולינום האופייני של A הוא $(x-1)^n$. מה המימדים של A? מהם $det(A)$, $trace(A)$? האם A בהכרח אלכסונית? לכסינה? האם A בהכרח סימטרית? האם הרכיבים של A הם בהכרח מספרים ממשיים?

(3) (א) עבור $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ נגדיר אופרטור $\mathbb{F}^n \xrightarrow{T_A} \mathbb{F}^n$ ע"י $T_A(v)=A\cdot v$. הראו ש A ניתנת ללכסון אמ"ם T_A ניתן ללכסון.

(ב) יהי $V \xrightarrow{T} V$ אופרטור לינארי ויהי $\mathcal{B}$ בסיס של V. הראו ש T ניתן ללכסון אמ"ם $[T]_{\mathcal{B}}$ ניתנת ללכסון.

(ג) תהיינה $A,Q \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, כאשר Q הפיכה. הראו כי $Q^{-1}AQ$ אלכסונית אמ"ם העמודות של Q הן הוקטורים העצמיים של A.

(4) (א) נגדיר אופרטור $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \xrightarrow{S} M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ע"י $S(X)=AX-XA$, כאשר $A=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$.

i. מצאו את המטריצה המייצגת של S בבסיס הסטנדרטי של $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. ii. מצאו את הערכים העצמיים והמרחבים העצמיים של S. iii. האם S ניתן ללכסון? (אם כן, רשמו את הצורה המלוכסנת של S.)

(ב) נגדיר אופרטור שחלוף $M_{n\times n}(\mathbb{F}) \xrightarrow{T} M_{n\times n}(\mathbb{F})$, $T(A)=A^t$.

i. מצאו את הערכים העצמיים והמרחבים העצמיים של T. האם T ניתן ללכסון? (אם כן, מהי הצורה האלכסונית של T ומה הבסיס המלכסן ?) ii. עבור $n=2$ רשמו את המטריצה המייצגת של T בבסיס הסטנדרטי.

(ג) מצאו את הערכים העצמיים ואת הוקטורים העצמיים של אופרטור $\mathbb{R}_{\le 5}[x] \xrightarrow{x\cdot\frac{d}{dx}} \mathbb{R}_{\le 5}[x]$. האם האופרטור ניתן ללכסון? אם כן, רשמו את המטריצה המייצגת בבסיס של וקטורים עצמיים .

(ד) נגדיר פעולות שורה אלמנטריות על $M_{2\times 2}(\mathbb{F})$: $e_{L_1\leftrightarrow L_2}$ (החלפת שורות), $e_{\lambda L_i}$ (כפל של L_i ב λ), $e_{L_1+\lambda L_2}$ בדומה. הראו שהפעולות מגדירות אופרטורים ליאריים על $M_{2\times 2}(\mathbb{F})$. עבור כל אחת מהפעולות הנ"ל מצאו את הערכים העצמיים/המרחבים העצמיים.

(5) יהי T אופרטור לינארי על מרחב וקטורי ממימד סופי. הוכיחו כי אם $T^2=T$ אז T ניתן ללכסון.

(6) תהיינה $A,B \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם A,B דומות אז יש להן אותו פולינום אופייני.

(ב) אם ל A,B אותו פולינום אופייני אז הן דומות.

(ג) A,B דומות אמ"ם יש להן אותם ערכים עצמיים (כולל ריבויים).

(7) הוכיחו או הפריכו:

(א) לכל אופרטור לינארי $V \xrightarrow{T} V$ קיים לפחות וקטור עצמי אחד.

(ב) אם מטריצה משולשת ניתנת ללכסון, אז היא אלכסונית.

(8) תהי $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ ו f_A הפולינום האופייני של A. הוכיחו: i. f_A הוא פולינום מתוקן ממעלה n.
ii. המקדם החופשי של f_A הוא $(-1)^n det(A)$. iii. המקדם של x^{n-1} ב f_A הוא $-trace(A)$.

(9) תהי $A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ ו $p(x)\in\mathbb{R}[x]$. הוכיחו: $p(A)=\begin{bmatrix}p(0)&p'(0)&\frac{1}{2}p''(0)&\frac{1}{3!}p'''(0)\\0&p(0)&p'(0)&\frac{1}{2}p''(0)\\0&0&p(0)&p'(0)\\0&0&0&p(0)\end{bmatrix}$.

(10) נגדיר $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \xrightarrow{T} M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ע"י $T(\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}a_{22}&a_{21}\\a_{12}&a_{11}\end{bmatrix}$. לכסנו את T וחשבו T^n, $(Id+T)^8$.

(11) (א) בהינתן $A=\begin{bmatrix}4&-3\\1&0\end{bmatrix}$ הוכיחו: $A^n=\frac{3^n-1}{2}A+\frac{3-3^n}{2}\mathbb{I}$.

(ב) מצאו את A^k, $k\in\mathbb{N}$ עבור $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&2\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&4\end{bmatrix}$

(ג) עבור המטריצות הנ"ל חשבו את e^A, $sin(A)$, $cos(A)$.