אלגברה לינארית להנדסת מכונות, 201.1.3721

אביב 2016 (מרצה: ד.קרנר)

תרגיל בית מס' 11.

(1) במקרים הבאים בדקו האם פונקציה $<,>$ היא מכפלה פנימית על V.

(א) $V=\mathbb{R}_{\le d}[x]$, $<p,q>=\int\limits_0^1 p(x)q(x)dx$

(ב) $V=\mathbb{R}[x]$, $<p,q>=\int\limits_0^1 p(x)q(x)dx$

(ג) $V=\mathbb{R}^n$, $<(a_1,\dots,a_n),(b_1,\dots,b_n)>=\sum\limits_{i=1}^n \lambda_i a_i b_i$, כאשר $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ הם קבועים חיוביים.

(ד) $V=\mathbb{C}^2$, i. $<(x_1,x_2),(y_1,y_2)>=x_1\overline{y_1}-x_2\overline{y_2}$ ii. $<(x_1,x_2),(y_1,y_2)>=2x_1\overline{y_1}+3x_2\overline{y_2}$
iii. $<(x_1,x_2),(y_1,y_2)>=x_1y_1+x_2y_2$

(2) נגדיר $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\xrightarrow{<,>}\mathbb{R}$ ע"י $(v,u)\to vAu^t$, כאשר $A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ הנה אלכסונית. מה התנאי על A (הכרחי ומספיק) לכך ש $<,>$ מהווה מכפלה פנימית על $\mathbb{R}^n$?

(3) יהי $V_\mathbb{R}$ מרחב מכפלה פנימית (ממימד סופי). הוכיחו/הפריכו

(א) אם $v\in V$ מקיים: $<v,u>=0$, עבור כל $u\in V$, אז $v=0$.

(ב) אם $v,u\in V$ מקיימים: $<v,w>=<u,w>$, עבור כל $w\in V$, אז $v=u$.

(ג) אם $U,W\subset V$ הם תתי מרחב אז:
i. אם $U\subseteq W$ אז $W^\perp\subseteq U^\perp$. ii. $(U+W)^\perp=U^\perp+W^\perp$. iii. $(U\cap W)^\perp=U^\perp+W^\perp$.

(ד) תהי $V\xrightarrow{T}V$ העתקה לינארית כך שעבור כל $v\in V$ מתקיים: $<v,T(v)>=0$. אז בהכרח $T=0$. (רמז: סיבובים)

(4) (א) הוכיחו ש $<A,B>=trace(B^tA)$ מהווה מכפלה פנימית על $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(ב) עבור $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&3\\2&-1\end{bmatrix}$ חשבו $||A||, ||B||, <A,B>$.

(ג) הוכיחו שהפיצול $M_{n\times n}(\mathbb{R})=M^{sym}_{n\times n}(\mathbb{R})\oplus M^{anti-sym}_{n\times n}(\mathbb{R})$ הוא אורתוגונלי, כלומר:
$\big(M^{sym}_{n\times n}(\mathbb{R})\big)^\perp=M^{anti-sym}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\big(M^{anti-sym}_{n\times n}(\mathbb{R})\big)^\perp=M^{sym}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(5) (א) תהי $<,>$ מכפלה פנימית על $\mathbb{R}^2$ (לאו דווקא סטנדרטית), ויהי $\mathcal{B}$ בסיס אורטונורמלי של $\mathbb{R}^2$. נניח ש $v\in\mathbb{R}^2$ מקיים:
$<(1,2),v>=-1$, $<(-1,1),v>=3$, (כאן $(*,*)$ הן קואורדינטות לפי $\mathcal{B}$.) מצאו את $[v]_\mathcal{B}$.

(ב) תהי $<,>$ מכפלה פנימית על $\mathbb{R}^n$ (לאו דווקא סטנדרטית), ויהי $\mathcal{B}=\{e_1,\dots,e_n\}$ בסיס אורטונורמלי של $\mathbb{R}^n$. הוכיחו שעבור כל $v\in\mathbb{R}^n$ מתקיים: $v=<v,e_1>e_1+\dots+<v,e_n>e_n$.

(6) ניקח מכפלה פנימית סטנדרטית $<,>$ על $\mathbb{R}^4$. נגדיר $W=Span\Big((1,1,1,1),(1,-1,2,-2),(1,2,-3,-4)\Big)\subset\mathbb{R}^4$.
מצאו את בסיס אורתונורמלי של W והרחיבו אותו לבסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^4$. מצאו את בסיס אורתונורמלי של $W^\perp$.

(7) בצעו תהליך Gram-Schmidt במקרים הבאים: i. $V=\mathbb{R}^3$, $v_1=(1,2,2)$, $v_2=(3,1,2)$, $v_3=(1,-1,0)$.
ii. $V=\mathbb{C}^3$, $v_1=(1,1+i,-1)$, $v_2=(1+i,1+i,-1+i)$, $v_3=(0,2-i,0)$.

(8) ניקח $\mathbb{R}_{\le2}[x]$ עם מכפלה פנימית $<p,q>=\int\limits_0^1 p(x)q(x)dx$.

(א) איזה בסיס מתקבל ע"י הפעלת תהליך Gram-Schmidt לבסיס $(1,2x,x^2)$?

(ב) מצאו את בסיס אורתוגונלי ל $W=Span(1+2x,1+x^2)$. מצאו את הנוסחה עבור הטלה אורתוגונלית $\mathbb{R}_{\le2}[x]\to W$.

(9) תהי $<,>$ מכפלה פנימית סטנדרטית על $\mathbb{R}^3$. נגדיר $W=Span\Big((1,-1,1),(1,2,1)\Big)\subset\mathbb{R}^3$.
i. מצאו את $W^\perp$. ii. מצאו את ההטלות האורתוגונליות P_W, $P_{W^\perp}$.

(10) יהי $(V_\mathbb{R},<,>)$ מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי. נגדיר $T=-2P_{W^\perp}+Id$, (כאשר P_W ההטלה האורתוגונלית על W).
הראו ש T הוא אופרטור לינארי, חח"ע, לכסין. הוכיחו: $T=P_W-P_{W^\perp}$. (כלומר T הנו אופרטור שיקוף ביחס ל W.)

(11) רשמו את המטריצות המייצגות עבור העתקות הבאות:

(א) $\mathbb{R}^3\xrightarrow{T}\mathbb{R}^3$ הטלה אורתוגונלית על מישור $\{2x+3y+5z=0\}$.

(ב) $\mathbb{R}^3\xrightarrow{T}\mathbb{R}^3$ שיקוף אורתוגונלי במישור $\{2x+3y+5z=0\}$.

(12) תהי $V_\mathbb{R}\xrightarrow{T}V_\mathbb{R}$ העתקה לינארית של מרחב ממימד סופי ויהי $\mathcal{B}=(v_1,\dots,v_n)$ בסיס אורתונורמלי ביחס למכפלה $<,>$.
הוכיחו: $trace(T)=\sum\limits_{i=1}^n<v_i,T(v_i)>$.

(13) עבור מרחב V עם מכפלה פנימית $<,>$ ונורמה $|v|=\sqrt{<v,v>}$ הוכיחו: $|v+w|^2+|v-w|^2=2(|v|^2+|w|^2)$.