



אלגברה לינארית להנדסת מכונות, 201.1.3721

אביב 2016 (מרצה: ד.קרנר)

תרגיל בית מס' 2.

(1) רשמו את טבלאות חיסור וכפל עבור $\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_6$. רשמו את טבלת החילוק עבור \mathbb{Z}_5 .

אילו איברים ב \mathbb{Z}_6 הם הפיכים?

(2) פתרו את מערכות המשוואות הלינאריות הבאות

$$\text{מעל } \mathbb{Q} \begin{cases} X_1 - 2X_2 + X_3 = 7 \\ 2X_1 - X_2 + 4X_3 = 17 \\ 3X_1 - 2X_2 + 2X_3 = 14 \end{cases} \text{ ii} \quad , \text{מעל } \mathbb{R} \begin{cases} 2X_1 - 3X_2 + 5X_3 - 2X_4 = 0 \\ 5X_2 - X_3 + 3X_4 = 1 \\ 7X_3 - X_4 = 3 \\ 2X_4 = 8 \end{cases} \text{ i}$$

$$\text{מעל } \mathbb{C} \begin{cases} (3-i)x_1 + (4+2i)x_2 = 2+6i \\ (4+2i)x_1 - (2+3i)x_2 = 5+4i \end{cases} \text{ iv} \quad , \text{מעל } \mathbb{Z}_7 \begin{cases} \bar{6}X_1 + \bar{2}X_2 + \bar{3}X_3 = 0 \\ X_1 + X_2 = 0 \\ \bar{3}X_1 + \bar{2}X_2 + \bar{5}X_3 = 0 \end{cases} \text{ iii}$$

$$\text{מעל } \mathbb{C} \begin{cases} (1+2i)X_1 + (3i-4)X_2 + (2-i)X_3 = 0 \\ (2i+5)X_1 + iX_2 + (6i+1)X_3 = 0 \end{cases} \text{ v}$$

(3) עבור איזה ערך של $k \in \mathbb{R}$ למערכות הבאות יש פתרון יחיד מעל \mathbb{R} ? יש אינסוף פתרונות? אין פתרונות?

$$\begin{cases} 2x - y + 2kz = 0 \\ kx + (1-k)y + z = 0 \\ kx - 2y + z = 0 \end{cases} \text{ iv} \quad , \begin{cases} kx + y + z = 2k \\ x + y - z = -2 \\ k^2x + ky + 2z = 1 \end{cases} \text{ iii} \quad , \begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases} \text{ ii} \quad , \begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 0 \\ x + y + kz = 1 \end{cases} \text{ i}$$

(4) כל אחת מהמטריצות הבאות הנה מטריצת מקדמים (מצומצמת) של מערכת משוואות הומוגנית. על-ידי מעבר למטריצה מדורגת קנונית, מצאו פתרון כללי לכל אחת מהמערכות הללו.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 7 & 4 & 0 & 4 \\ 3 & 6 & 10 & 5 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -9 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{(א) מעל } \mathbb{R}$$

$$\begin{bmatrix} 1+i & 2+i & i-5 \\ 3i & 4 & 2-3i \\ -5-9i & 5i-15 & 1+5i \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1+3i & 5-4i \\ 5+5i & 13i-6 \end{bmatrix} \quad \text{(ב) מעל } \mathbb{C}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{8} & \bar{6} & \bar{2} & \bar{5} & \bar{3} \\ \bar{4} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{8} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{9} & \bar{1} & \bar{5} \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{9} \\ \bar{7} & \bar{7} & \bar{1} & \bar{5} \end{bmatrix} \quad \text{(ג) מעל } \mathbb{Z}_{13}$$

(5) פתרו את המערכות הלינאריות הבאות בשדות הנתונים. במקרה של אינסוף פתרונות, תארו את קבוצת הפתרונות.

$$\begin{cases} 2x - 9y + 3z = -7 \\ -4x + 8y + z = -21 \\ x - 11y - 2z = 14 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} 4x + y + 2z = 1 \\ x - 2y + z = -5 \\ -11x - 9y + 3z = 4 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} 2x + 3y - z = 7 \\ 5x - y + 3z = 6 \\ x - 3y + 2z = -3 \end{cases} \quad \text{(א) מעל } \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \quad \text{(ב) מעל } \mathbb{Z}_3$$

$$\begin{cases} x + y\sqrt{2} + z\sqrt{2} = 3 \\ x + y(1 + \sqrt{2}) + z = 3 + \sqrt{2} \\ x + y - z\sqrt{2} = 4 + \sqrt{2} \end{cases} \quad \text{(ג) מעל } \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

(6) נתונה מערכת של m משוואות לינאריות ב n נעלמים, כאשר $m < n$.

(א) האם למערכת בהכרח יש אינסוף פתרונות?

(ב) האם יתכן שלמערכת יש פתרון יחיד?

(ג) האם יתכן שלמערכת אין פתרון?

(7) (א) האם קיימת מערכת לינארית מעל \mathbb{R} בעלת שני פתרונות בדיוק?

(ב) האם קיימת מערכת לינארית מעל \mathbb{F} (שדה כלשהו) בעלת שני פתרונות בדיוק?

(8) נניח שכל משוואות במערכת מסוימת מוכפלות בקבוע, ואח"כ מחברים את המשוואות המתקבלות, ומקבלים משוואה חדשה.

הוכיחו כי כל פתרון של המערכת פותר גם את המשוואה החדשה.

(9) הוכיחו שלמערכת הלא הומוגנית מעל \mathbb{R} : $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ יש פתרון יחיד אם $ad \neq bc$ והפתרון הוא:

$$y = \frac{af - ec}{ad - bc}, x = \frac{de - bf}{ad - bc}$$