אלגברה לינארית להנדסת מכונות, 201.1.3721

אביב 2016 (מרצה: ד.קרנר)

תרגיל בית מס' 3.5.

(1) (א) חשבו: $(i^7+i^8+i^9)^{33}$, $(1+i+i^2+\cdots+i^{37})^{107}$, $(cos\frac{\pi}{12}+i\cdot sin\frac{\pi}{12})^{26}$, $\frac{(\sqrt{3}+i)^{18}}{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^{16}}$.

(ב) הוכיחו: $(cos\alpha+i\cdot sin\alpha)(cos\beta+i\cdot sin\beta)=cos(\alpha+\beta)+i\cdot sin(\alpha+\beta)$.

(2) (א) מצאו את הפולינום $p(x)\in\mathbb{R}_{\le 3}[x]$ המקיים: $p(0)=2$, $p(2)=6$, $p(4)=3$, $p(6)=-5$.

(ב) תהי $Ax=b$ מערכת משוואות מעל $\mathbb{C}$. נניח ש u,v הם פתרונות פרטיים שלה. הוכיחו ש $\frac{u+v}{2}$ הוא גם פתרון פרטי. הוכיחו שאם $u+2v$ הוא גם פתרון פרטי אז המערכת בהכרח הומוגנית.

(3) האם הקבוצות הבאות הן תתי-מרחב? i. $\{x|\ x^5+4x=0\}\subseteq\mathbb{Z}_5$, ii. $\{(x,y)|\ (x^2+y^2)^2=0\}\subseteq\mathbb{R}^2$. iii. $\{(x,y)|\ sin(\frac{y}{x})=0\}\cup\{(0,0)\}\subseteq\mathbb{R}^2$, iv. $\{(z_1,z_2)|\ z_1=iz_2\}\subseteq\mathbb{C}^2$, v. $\{(z_1,z_2)|\ z_1=i\overline{z_2}\}\subseteq\mathbb{C}^2$, vi. $\{(x_1,x_2)|\ x_1\in\mathbb{Z}\}\subseteq\mathbb{R}^2$, vii. $\{(x_1,x_2,x_3)|\ x_1-x_3=1\}\subseteq\mathbb{R}^3$
viii. $W=$ קבוצת כל הווקטורים ב $\mathbb{R}^5$ אשר מספר אי-זוגי של קואורדינטות שלהם מתאפס.

(4) האם $\mathbb{R}^2$ הנו מרחב וקטורי ביחס לפעולות הבאות? $(a,b)\oplus(c,d)=(a+c+2,b+d)$, $\lambda\odot(a,b)=(\lambda\cdot a+\lambda-1,\lambda\cdot b)$.

(5) (א) פונקציה $\mathbb{R}\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ נקראת קבועה למקוטעין אם קיימות נקודות $a_1<a_2<\cdots<a_n$ כך ש f קבוע בכל אחד מהקטעים $(-\infty,a_1),\ (a_1,a_2),\dots,(a_{n-1},a_n),\ (a_n,\infty)$. האם קבוצת כל הפונקציות קבועות למקוטעין מהווה מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$? (ביחס לפעולות הרגילות של סכום וכפל בסקלר)

(ב) אותה שאלה אבל עבור פונקציות קבועות למקוטעין שמקבלות רק ערכים רציונליים.

(6) תהי V קבוצת כל הסדרות הממשיות, $(a_1,a_2,\dots,a_n,\dots)$, $a_i\in\mathbb{R}$. הוכיחו ש V מרחב וקטורי ביחס לסכום של סדרות וכפל בקבוע. (מהו וקטור אפס?) אילו מבין הקבוצות הבאות הן תתי-מרחב של V?
i. כל הסדרות העולות, ii. כל הסדרות החסומות, iii. כל הסדרות המתכנסות, iv. כל הסדרות המתכנסות ל $\sqrt{2}$.

(7) יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ המכיל $sin(x)$ ו $cos(x)$. הוכיחו ש $\sqrt{2}\cdot sin(x+a)\in V$ עבור כל $a\in\mathbb{R}$.

(8) (א) תהי $\mathbb{F}[x]$ קבוצה של כל הפולינומים עם מקדמים בשדה $\mathbb{F}$. תהי $W_-:=\{p(x)|\ p(-x)=-p(x)\}\subseteq\mathbb{F}[x]$. האם W_- זה תת-מרחב וקטורי? אותה שאלה עבור $W_+=\{p(x)|\ p(-x)=p(x)\}$.

(ב) יהי $V\subseteq\mathbb{R}[x]$ תת-מרחב וקטורי המכיל (x^3-x^2+x), (x^2-x+1), $(x-1)$. האם בהכרח $\sqrt{2}x^2+ln(3)\in V$?

(9) (א) ישר ב $\mathbb{R}^2$ זה תת-קבוצה המוגדרת ע"י משוואה $ax+by=c$, כאן $a,b,c\in\mathbb{R}$ קבועים ו $(a,b)\neq(0,0)$. הוכיחו שישר הוא תת-מרחב וקטורי של $\mathbb{R}^2$ אמ"ם $c=0$.

(ב) מישור ב $\mathbb{R}^3$ זה תת-קבוצה המוגדרת ע"י $ax+by+cz=d$, כאן $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ קבועים ו $(a,b,c)\neq(0,0,0)$. ציירו את המישורים $\{x=0\}$, $\{y=0\}$, $\{x+y=1\}$, $\{x+y+z=0\}$, $\{x+y+z=1\}$. הוכיחו שמישור הוא תת-מרחב וקטורי אמ"ם $d=0$.

(ג) מישור-על ב $\mathbb{R}^n$ זה תת-קבוצה המוגדרת ע"י משוואה $a_1x_1+\cdots+a_nx_n=d$, כאן $a_1,\dots,a_n,d\in\mathbb{R}$ קבועים ו $(a_1,\dots,a_n)\neq(0,\dots,0)$. מתי מישור-על הוא תת-מרחב וקטורי?

(10) (א) הוכיחו שישר $\{y=3x\}\subset\mathbb{R}^2$ נפרש ע"י וקטור $(1,3)$.

(ב) הוכיחו שווקטורים $(5,0,-2)$, $(0,5,-3)$ פורשים את המישור $\{2x+3y+5z=0\}\subset\mathbb{R}^3$.

(ג) האם וקטורים $(1,1,-1,0)$, $(1,0,1,-1)$, $(0,\frac{2}{3},1,-1)$ פורשים את $\{2x+3y+5z+7w=0\}\subset\mathbb{R}^4$?

(11) (א) בהינתן $v=(1,-1,1)$, $u=(1,1,-1)$ הוכיחו ש $Span(v,u)\subset\mathbb{R}^3$ זה מישור ומצאו את משוואת המישור הזה.

(ב) בהינתן $v_1=(1,2,3)$, $v_2=(2,3,4)$, $u_1=(1,-2,3)$, $u_2=(2,-3,4)$ מצאו $Span(v_1,v_2)\cap Span(u_1,u_2)$, $Span(v_1,v_2)+Span(u_1,u_2)$.

(12) יהי V מרחב וקטורי ו $W_1,W_2,W_3\subseteq V$ תתי-מרחב. הוכיחו/הפריכו (ע"י דוגמא נגדית):
i. $W_1+W_1=W_1$. ii. אם $W_1+W_3=W_2+W_3$ אז $W_1=W_2$.
iii. $(W_1+W_2)\cap W_3=(W_1\cap W_3)+(W_2\cap W_3)$.