אלגברה לינארית להנדסת מכונות, 201.1.3721

אביב 2016 (מרצה: ד.קרנר)

תרגיל בית מס' 3.

(1) האם $\mathbb{R}^2$ מהווה מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ ביחס לפעולות הבאות של חיבור וכפל בסקלר:
$(a,b)\oplus(c,d) := (a+c, b+d)$, $\lambda\odot(a,b) := (\lambda a, 0)$.

(2) קבעו אילו מהקבוצות הבאות הן מרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{R}$ (ביחס לפעולות החיבור והכפל בסקלר הרגילות של $\mathbb{R}^2$):
i. $\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 |\ a<b\}$, ii. $\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 |\ a\le b\}$, iii. $\{(0,b)|\ b\in\mathbb{R}\}$.

(3) קבעו אילו מהקבוצות הבאות הן מרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{R}$ (ביחס לפעולות החיבור והכפל בסקלר הרגילות של $\mathbb{R}^4$):
i. $\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 |\ x_1+x_2=x_3+x_4\}$, ii. $\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 |\ x_1+x_2\le x_3+x_4\}$.

(4) תהי X קבוצה כלשהי (לא ריקה), יהי $\mathbb{F}$ שדה, ותהי V קבוצת פונקציות מ X ל $\mathbb{F}$. נגדיר פעולות של חיבור ב V וכפל של איברי V בסקלר בצורה הבאה. עבור כל $f,g\in V$, $\alpha\in\mathbb{F}$: $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$, $(\alpha\cdot f)(x) := \alpha\cdot f(x)$.
(א) בדקו ש V הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ביחס לפעולות אלה. (מהו וקטור האפס?)
(ב) ניקח $X=\mathbb{F}=\mathbb{R}$. מצאו אילו מהקבוצות הבאות הן תתי-מרחב של V:
i. $\{f\in V|\ f(0)=0\}$, ii. $\{f\in V|\ f(0)=1\}$.
iii. קבוצת פונקציות $f\in V$ כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $|f(x)|\le 100$.
iv. קבוצת פונקציות $f\in V$ שעבורן קיים $M\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $|f(x)|\le M$.

(5) נתונים וקטורים ב $\mathbb{R}^4$: $v_1=(1,-1,3,2)$, $v_2=(2,0,1,2)$, $v_3=(1,1,2,-1)$.
(א) האם וקטור $(3,1,0,2)$ הוא צירוף לינארי של v_1,v_2,v_3?
(ב) האם וקטור $(-2,-2,0,1)$ הוא צירוף לינארי של v_1,v_2,v_3?
(ג) מהו התנאי על וקטור $(a_1,a_2,a_3,a_4)\in\mathbb{R}^4$ להיות צירוף לינארי של v_1, v_2, v_3?
(התנאי אמור להיות מערכת משוואות לינארית ב a_1,a_2,a_3,a_4.)

(6) יהיו $v_1=(2i,1+3i,2+i)$, $v_2=(-1+i,2-i,1)$ וקטורים במרחב $\mathbb{C}^3$ (מעל $\mathbb{C}$). לכל אחד מהוקטורים הבאים מצאו האם הוא שייך ל $Span(v_1,v_2)$. אם כן,בטאו אותו כצירוף לינארי של v_1,v_2.
i. $(-1+3i,3+2i,3+i)$, ii. $(4+2i,-1+11i,4+3i)$, iii. $(-10+6i,-12+14i,1+13i)$.

(7) האם הוקטורים הבאים תלוים לינארית ב $\mathbb{R}^4$?
i. $(2,9,4,23)$, $(3,8,-5,7)$, $(1,3,-1,4)$. ii. $(3,-6,1,4)$, $(2,1,0,-3)$, $(1,-2,4,1)$.

(8) נסמן ב $\mathbb{R}_{<4}[x]$ את המרחב הווקטורי של כל הפולינומים ממעלה קטנה מ 4 במשתנה x עם מקדמים ב $\mathbb{R}$. האם הווקטורים הבאים תלוים לינארית ב $\mathbb{R}_{<4}[x]$?
(א) $2x^3-x^2-3x+5$, x^3+2x^2+4x-1, x^3-4x^2+2x+3.
(ב) $2x^3-7x^2-7x+9$, x^3-4x^2-3x+4, x^3-5x^2-2x+3.

(9) מצאו מערכת משוואות הומוגנית מעל $\mathbb{Q}$ שמרחב הפתרונות שלה נפרשים ע"י
$(1,-2,0,3,-1)$, $(2,-3,2,5,-3)$, $(1,-2,1,2,-2)$.

(10) יהי V מרחב וקטורי עם תת קבוצות $S,T\subset V$. הוכיחו $Span(Span(S))=Span(S)$, $Span(S\cup T)=Span(Span(S)\cup Span(T))$. האם מתקיים $Span(S\cup T)=Span(S)\cup Span(T)$?

(11) יהיו W_1,W_2,W_3 תתי-מרחב של מרחב וקטורי V. הוכיחו:
(א) אם $W_1\subseteq W_2$ אז $W_1+(W_2\cap W_3)=(W_1+W_2)\cap(W_1+W_3)$.
(ב) אם $W_1\subseteq W_2$ אז $W_2\cap(W_1+W_3)=(W_1\cap W_2)+(W_2\cap W_3)$.

(12) תהי V_{even} קבוצת כל הפולינומים ב $\mathbb{F}_{\le n}[x]$ שבהם כל המקדמים בעלי אינדקס זוגי שווים לאפס. תהי V_{odd} קבוצת כל הפולינומים ב $\mathbb{F}_{\le n}[x]$ שבהם כל המקדמים בעלי אינדקס אי-זוגי שווים לאפס. הוכיחו כי V_{odd}, V_{even} הם תתי-מרחב של $\mathbb{F}_{\le n}[x]$ ומצאו למה שווים $V_{odd}+V_{even}$, $V_{odd}\cap V_{even}$.

(13) יהיו $v_1,\dots,v_k,v_{k+1},\dots,v_n$ וקטורים בלתי תלוים לינארית במרחב וקטורי V.
הוכיחו כי $Span(v_1,\dots,v_k)\cap Span(v_{k+1},\dots,v_n)=\{0\}$.

(14) יהיו W_1,W_2 תתי-מרחב של מרחב וקטורי V .
(א) הוכיחו: אם $W_1\cup W_2$ הינו תת-מרחב של V אז $W_1\subseteq W_2$ או $W_2\subseteq W_1$.
(ב) הסיקו מ (א) כי מרחב וקטורי אינו יכול להיות איחוד של שני תתי-מרחב שלו השונים ממנו.

(15) יהיו $u_1,\dots,u_r$ וקטורים בלתי תלויים לינארית במרחב וקטורי $V_{\mathbb{F}}$. הוכיחו:
(א) אם $\alpha_1,\dots,\alpha_r\in\mathbb{F}$ שונים מ 0 אז גם וקטורים $\alpha_1u_1,\dots,\alpha_ru_r$ בלתי תלוים לינארית.
(ב) אם $\alpha_1,\dots,\alpha_r\in\mathbb{F}$ ו $w=\sum_{k=1}^{r}\alpha_ku_k$ כאשר $\alpha_i\neq 0$ אז גם הוקטורים $u_1,\dots,u_{i-1},w,u_{i+1},\dots,u_r$ בלתי תלוים לינארית.