אלגברה לינארית להנדסת מכונות, 201.1.3721

אביב 2016 (מרצה: ד.קרנר)

תרגיל בית מס' 4.

(1) נגדיר תת-מרחב W של מרחב המטריצות $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ע"י

$$W = Span\left\{\begin{bmatrix}1 & -5\\ -4 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & -4\\ -5 & 7\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & -7\\ -5 & 1\end{bmatrix}\right\}$$

(א) מצאו את בסיס ל W

(ב) בטאו את המטריצה $\begin{bmatrix}4 & -14\\ -13 & 11\end{bmatrix}$ כצירוף לינארי של הבסיס של W שמצאתם ב (א).

(2) מצאו בסיס למרחב הפתרונות של המערכת $x+y+z=0$ מעל $\mathbb{Z}_3$.

(3) בכל אחת מהדוגמאות הבאות מצאו בסיס לתתי-מרחב $U, W, U+W, U\cap W$ של מרחב וקטורי V.

(א) $V_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^5$, $U = Span\{(1,0,3,-2,1),(3,-1,4,-1,0),(0,2,0,-1,1)\}$,
$W = Span\{(3,0,-1,1,9),(4,1,11,4,16),(-2,1,13,2,-2)\}$

(ב) $V_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}_{\leq 3}[t]$, $U = Span\{t^3+4t^2-t+3,\ t^3+5t^2+5,\ 3t^3+10t^2-5t+5\}$
$W = Span\{t^3+4t^2+6,\ t^3-2t^2-t+5,\ 2t^3+2t^2-3t+9\}$

(ג) $V_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^4$, $W = \{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 \mid a=d\ ,\ b=2c\}$, $U = \{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 \mid b+d=2c\}$.

(ד) $V_{\mathbb{Z}_{11}} = \mathbb{Z}_{11}^4$, $W = Span\{(\bar{2},\bar{1},\bar{0},\bar{1}),(\bar{0},\bar{1},\bar{1},\overline{10})\}$, $U = \{(a,b,c,d)\in\mathbb{Z}_{11}^4 \mid a=b\ ,\ d=\bar{2}\cdot c\}$.

(4) יהי V מרחב וקטורי ממימד n ויהי $\mathcal{B}=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס של V.
הראו כי גם $\{v_1, v_1+v_2,\dots,\sum_{k=1}^{n} v_k\}$ הינו בסיס של V.

(5) יהי V מרחב וקטורי ותהי $S=\{v_1,\dots,v_r\}$ קבוצה פורשת של V המקיימת: לכל $v_i\in S$ יש הצגה יחידה כצירוף לינארי של איברי $S\setminus\{v_i\}$. הראו כי לכל $1\leq i\leq r$, קבוצה $S\setminus\{v_i\}$ הינה בסיס של V.

(6) יהי V מרחב וקטורי ותהי S תת-קבוצה של V. נאמר כי S *בלתי תלויה לינארית מרבית* אם היא בלתי תלויה לינארית וכל תת קבוצה של V המכילה את S ממש היא תלויה לינארית. הוכיחו: S היא בסיס אמ"ם היא בלתי תלויה לינארית מרבית.

(7) השלימו כל אחת מרשימות הוקטורים שלהלן לבסיס למרחב הוקטורי הנתון:

(א) $V=\mathbb{R}^5$, $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ והוקטורים: $(1,1,1,1,1)$, $(1,2,3,2,1)$, $(1,0,1,0,1)$.

(ב) $V=M_{2\times 2}(\mathbb{Q})$, $F=\mathbb{Q}$, והוקטורים: $\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}$

(ג) $V=\mathbb{C}$, $F=\mathbb{R}$, והוקטור: $1+i$.

(8) נתבונן בתתי-מרחב הבאים של $\mathbb{R}^4$: $U=Span\{(1,2,3,0),(0,1,1,0)\}$, $W=Span\{2,-1,1,4),\ (3,-1,2,8)\}$.
מצאו בסיס ל $U+W$ ובסיס ל $U\cap W$.
ודאו כי מתקיימת כאן הזהות $dim(U)+dim(W)=dim(U\cap W)+dim(U+W)$.

(9) יהיו U,W תתי-מרחב של מרחב וקטורי $\mathbb{C}^3$ מעל $\mathbb{C}$. נניח כי $dim(U)=dim(W)=2$. הראו כי $U\cap W\neq\{0\}$.
האם הטענה נכונה כשהמרחב הוקטורי הוא $\mathbb{C}^3$ מעל השדה $\mathbb{R}$?

(10) יהיו U,W תתי-מרחב של מרחב וקטורי $\mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{R}$. נניח כי $dim(U)=2$ ו $dim(W)=1$.
הוכיחו כי $U+W=\mathbb{R}^3$ אמ"ם W אינו תת-מרחב של U.

(11) יהיו U,W תתי-מרחב של מרחב וקטורי V. יהי $\{u_1,\dots,u_m\}$ בסיס של U ו $\{w_1,\dots,w_k\}$ בסיס של W.
הוכיחו כי $\{u_1,\dots,u_m,w_1,\dots,w_k\}$ קבוצה בלתי תלויה לינארית אמ"ם $U\cap W=\{0\}$.

(12) בהינתן $u_1=(1,-2)$, $u_2=(4,-7)$, הוכיחו כי $\mathcal{B}=(u_1,u_2)$ מהווה בסיס (סדור) ל $\mathbb{R}^2$. חשבו את וקטורי הקואורדינטות של הוקטורים הבאים ביחס ל $\mathcal{B}$: i. $(3,5)$, ii. $(1,1)$, iii. (a,b) (עבור $a,b\in\mathbb{R}$ כלליים.)

(13) מצאו בסיס סדור $\mathcal{B}=(v_1,v_2,v_3)$ ל $\mathbb{Q}^3$ מעל $\mathbb{Q}$, כך שווקטור הקואורדינטות של $(0,-1,3)$ ביחס ל $\mathcal{B}$ הינו $\begin{bmatrix}2\\ -2\\ 1\end{bmatrix}$.

(14) יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית ויהיו $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ בסיסים שונים של V. הוכיחו שלכל וקטור $v\in\mathcal{B}$ קיים וקטור $u\in\mathcal{C}$ כך שהקבוצות $(\mathcal{C}\setminus\{u\})\cup\{v\}$, $(\mathcal{B}\setminus\{v\})\cup\{u\}$ הן בסיסים של V.

(15) ל $a,b\in\mathbb{R}$ נגדיר מטריצות $A=\begin{bmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}b & 2 & 2 & 2\\ 2 & b & 2 & 2\\ 2 & 2 & b & 2\end{bmatrix}$. יהי $W(a)$ המרחב הנפרש ע"י עמודות של A ויהי $U(b)$ מרחב הפתרונות של מערכת משוואות $Bx=0$. לכל ערכי הפרמטרים a,b מצאו בסיס ומימד של כל אחד מתתי-המרחב: $U(b)$, $W(a)$, $U(b)+W(a)$, $U(b)\cap W(a)$.