אלגברה לינארית להנדסת מכונות, 201.1.3721

אביב 2016 (מרצה: ד.קרנר)

תרגיל בית מס' 6.

(1) חשבו את הדטרמיננטות הבאות (מעל $\mathbb{R}$): i. $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$, ii. $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$,

iii. $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \\ -1 & 4 & 6 \end{vmatrix}$, iv. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$, v. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, iv. $\begin{vmatrix} cos(\lambda) & sin(\lambda) \\ -sin(\lambda) & cos(\lambda) \end{vmatrix}$.

(2) חשבו את הדטרמיננטות הבאות (מעל $\mathbb{R}$):

i. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \dots & 3 & 4 & 5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & n-1 & n & 1 & \dots & n-3 \\ n & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \end{vmatrix}$, ii. $\begin{vmatrix} a & a & \dots & a & a \\ a & a+x_1 & \dots & a & a \\ a & a & a+x_2 & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & a+x_{n-1} \end{vmatrix}$

iii. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 4 & -2 & 4 & 4 & \dots & 4 \\ 6 & 6 & -3 & 6 & \dots & 6 \\ 8 & 8 & 8 & -4 & \dots & 8 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2n & 2n & 2n & 2n & \dots & -n \end{vmatrix}$, iv. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \dots & x^{n-1} \\ x & 1 & x^2 & x^3 & \dots & x^{n-1} \\ x & x^2 & 1 & x^3 & \dots & x^{n-1} \\ x & x^2 & x^3 & 1 & \dots & x^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x^2 & x^3 & x^4 & \dots & 1 \end{vmatrix}$

(3) חשבו את הדטרמיננטות הבאות: i. $(\mathbb{F}=\mathbb{C})$ $\begin{vmatrix} 3+i & 2 & -i \\ 4-2i & 0 & 1+i \\ i & 3 & 5-i \end{vmatrix}$, ii. $(\mathbb{F}=\mathbb{Z}_5)$ $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$, iii. $(\mathbb{F}=\mathbb{Z}_2)$ $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(4) פתרו את המשוואה $0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & (n-1)-x \end{vmatrix}$.

(5) תהי $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ בלוק-אלכסונית, כלומר $A = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & A_2 \end{bmatrix}$, $A_1 \in M_{n_1\times n_1}(\mathbb{F})$, $A_2 \in M_{n_2\times n_2}(\mathbb{F})$, $n_1+n_2=n$.

הוכיחו: $det(A) = det(A_1)det(A_2)$. בפרט, אם A אלכסונית, עם $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ באלכסון, אז $det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.

(6) תהי $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{F})$ ונניח ש $det(A) = a \neq 0$.

(א) מצאו $det(A(A^t)^{-1})$, $det(AA^t)$, $det(3A)$, $det(-A)$, $det(A^{-1})$.

(ב) תהי $B \in M_{4\times 4}(\mathbb{F})$ הפיכה. מצאו $det(B^{-1}AB)$, $det(B^2AB^{-1})$, $det(B^{-1}ABA)$.

(7) (א) תהי $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. הוכיחו $det(A) = det(A^t)$, $det(AA^t) \geq 0$.

(ב) נניח שבנוסף $A = -A^t$ ו n אי-זוגי. הוכיחו $det(A) = 0$.

(ג) A נקראת אורטוגונלית אם $AA^t = \mathbb{I}_{n\times n}$. הוכיחו כי כל מטריצה אורטוגונלית מקיימת $det(A) = \pm 1$.

(8) תהי $A \in M_{n\times n}(\mathbb{Z})$, כלומר כל האיברים של A הם מספרים שלמים. הוכיחו:

(א) אם $det(A) = \pm 1$ אז גם ב A^{-1} כל האיברים הם מספרים שלמים.

(ב) אם A הפיכה וכל האיברים של A^{-1} הם שלמים אז $det(A) = \pm 1$.

(9) עבור $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ נסמן את המטריצה המצורפת ע"י $adj(A)$. הוכיחו/הפריכו (ע"י דוגמא נגדית):

i. A הפיכה אמ"ם $adj(A)$ הפיכה. ii. $adj(A) = \mathbb{I}_{n\times n}$ אמ"ם $A = \mathbb{I}_{n\times n}$. iii. $adj(A) = \mathbb{O}$ אמ"ם $A = \mathbb{O}$.

iv. עבור כל $\lambda \in \mathbb{F}$ מתקיים $adj(\lambda \cdot A) = \lambda^{n-1}adj(A)$. v. $adj(AB) = adj(BA)$.

vi. אם $n > 1$ ו $adj(2A) = adj(3A)$ אז A איננה הפיכה.

(10) הוכיחו/הפריכו (ע"י דוגמא נגדית)

i. אם $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ אז $det(A+B) = det(A)+det(B)$. ii. אם $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ הפיכה אז $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$.

(11) מצאו דוגמא של $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ לא אפסיות המקיימות $AB = 2BA$. הוכיחו שאם A, B הפיכות אז $AB \neq 2BA$.