אלגברה לינארית להנדסת מכונות, 201.1.3721

אביב 2016 (מרצה: ד.קרנר)

תרגיל בית מס' 7.

(1) בדקו אילו מבין הפונקציות הבאות הן טרנספורמציות לינאריות:

(א) $\mathbb{Q}^3 \xrightarrow{T} \mathbb{Q}^2$ המוגדרת ע"י $T(x,y,z)=(xy,yz)$.

(ב) $M_{n\times k}(\mathbb{F}) \xrightarrow{T} M_{n\times m}(\mathbb{F})$ המוגדרת ע"י $T(B)=BA$, כאן $A\in M_{k\times m}(\mathbb{F})$ נתונה.

(ג) $M_{n\times n}(\mathbb{F}) \xrightarrow{T} M_{n\times n}(\mathbb{F})$ המוגדרת ע"י $T(B)=A^{-1}BA$, כאן $A\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ נתונה והפיכה.

(ד) $\mathbb{F}[x] \xrightarrow{T} \mathbb{F}$ המוגדרת ע"י $T(p(x))=p(1)$.

(ה) $\mathbb{F}[x] \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \mathbb{F}[x]$ המוגדרת ע"י $T(p(x))=p'(x)$. (הנגזרת)

(ו) $(\mathbb{Z}_7)^3 \xrightarrow{T} (\mathbb{Z}_3)^2$ המוגדרת ע"י $T(x,y,z)=(x(mod\,3),z(mod\,3))$

(2) חשבו $ker(T)$ עבור כל אחת מטרנספורמציות לינאריות של שאלה 1.

(3) הוכיחו שט"ל $V \xrightarrow{T} W$ היא על אמ"ם $Im(T)=W$. הוכיחו ש T היא חח"ע אמ"ם $ker(T)=\{0\}$.

(4) בכל אחד מהסעיפים הבאים בדקו האם T היא טרנספורמציה לינארית.

i. $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^3$, $T(a,b,c)=(a+c,3,2a-b)$, ii. $\mathbb{C}^3 \xrightarrow{T} \mathbb{C}^3$, $T(a,b,c)=(-c,0,-a+2b)$,

iii. $\mathbb{Q}^3 \xrightarrow{T} \mathbb{Q}$, $T(a,b,c)=c-1$, iv. $\mathbb{Q}[x] \xrightarrow{T} \mathbb{Q}[x]$, $T(p(x))=-p(x)$.

(5) (א) בכל אחד מהסעיפים הבאים הראו ש $\mathbb{C}_{\le 2}[x] \xrightarrow{T} \mathbb{C}_{\le 2}[x]$ היא ט"ל ומצאו בסיסים של $ker(T)$, $Im(T)$.

i. $T(p(x))=p'(x)$, ii. $T(p(x))=p(x-2)$, iii. $T(p(x))=(x-2)p''(x)+xp'(x)-3p(x)$.

(ב) בכל אחד מהסעיפים הקודמים חשבו את המטריצה המייצגת, $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$, לפי בסיס $\mathcal{B}=(1,x,x^2)$.

(ג) חשבו את המטריצה המייצגת, $[T]_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}$, לפי בסיסים $\mathcal{C}=(2,x-x^2,3x)$, $\mathcal{D}=(x-1,x^2,2x+x^2)$.

(6) נגדיר העתקה $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \xrightarrow{T} M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ע"י $T(A)=BA$, כאשר $B=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}$.

(א) בדקו כי T היא טרנספורמציה לינארית. מצאו בסיס ומימד של $ker(T)$, $Im(T)$.

(ב) חשבו את המטריצה המייצגת $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ לפי הבסיס הסטנדרטי $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$.

(7) בסעיפים הבאים בדקו האם קיימת טרנספורמציה לינארית $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^4$ המקיימת את התנאים הנתונים

(א) $T(1,2,-1)=(1,0,0,1)$, $T(-1,-1,2)=(-1,0,0,1)$, $T(0,2,2)=(0,0,0,2)$.

(ב) $T(1,2,-1)=(1,0,0,1)$, $T(-1,-1,2)=(-1,0,0,1)$, $T(0,1,2)=(0,0,0,2)$.

(8) על ט"ל $\mathbb{R}^4 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^2$ ידוע ש $T(1,1,0,1)=T(0,1,0,1)=T(1,1,0,0)=(1,1)$, וגם שווקטורים $T(1,1,0,0)$, $T(0,0,1,0)$ הם בת"ל.

(א) מצאו בסיס ומימד עבור $ker(T)$, $Im(T)$.

(ב) מצאו את T המקיימת את הנ"ל ומצאו את המטריצה המייצגת $[T]_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_4}$ לפי הבסיסים הסטנדרטיים.

(9) על ט"ל $\mathbb{R}^5 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^3$ ידוע ש $T(v_1)=T(v_2)=T(v_2)=u\neq\vec{0}$, כאשר (v_1,v_2,v_3) הוא בסיס ל $\mathbb{R}^3$. מצאו בסיס ל $Im(T)$, $ker(T)$.

(10) הוכיחו/הפריכו (ע"י דוגמא נגדית):

(א) אם אופרטורים לינאריים $V \xrightarrow{T,S} V$ מקיימים: $ker(T)=ker(S)$, $Im(T)=Im(S)$ אז $T=S$.

(ב) קיימת ט"ל $\mathbb{R}^4 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^3$ שעבורה $ker(T)$ נפרש ע"י $(1,0,1,0)$, $(2,1,3,0)$ ותמונה נפרשת ע"י $(0,1,2)$, $(3,1,2)$. (אם היא קיימת, אז בנו אותה)

(ג) קיימת ט"ל $\mathbb{R}^4 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^3$ שעבורה $ker(T)$ נפרש ע"י $(1,0,1,0)$, ותמונה נפרשת ע"י $(0,1,2)$, $(3,1,2)$. (אם היא קיימת, אז בנו אותה)

(11) יהיו V_1,V_2 מרחבים וקטוריים ממימד סופי, מעל שדה $\mathbb{F}$. יהיו $W_1\subseteq V_1$, $W_2\subseteq V_2$ תתי-מרחב.

(א) הוכיחו כי קיימת ט"ל $V_1 \xrightarrow{T} V_2$ כך ש $ker(T)=W_1$ אמ"ם $dim(V_1)-dim(W_1)\le dim(V_2)$.

(ב) הוכיחו כי קיימת ט"ל $V_1 \xrightarrow{T} V_2$ כך ש $Im(T)=W_2$ אמ"ם $dim(W_2)\le dim(V_1)$.

(ג) הוכיחו כי קיימת ט"ל $V_1 \xrightarrow{T} V_2$ כך ש $ker(T)=W_1$, $Im(T)=W_2$ אמ"ם $dim(V_1)=dim(W_1)+dim(W_2)$.

(12) תהי $V_1 \xrightarrow{f} V_2$ ט"ל של מרחבים וקטוריים. עבור תת-קבוצה $W\subseteq V_1$ ניקח תמונה $f(W)\subseteq V_2$. הוכיחו:

(א) $f(W)\subseteq V_2$ הוא תת-מרחב אם $W\subseteq V_1$ הוא תת-מרחב.

(ב) אם $W\subset V_1$ הוא תת-מרחב ממימד סופי אז $dim(f(W))\le dim(W)$.

(ג) אם f הפיכה ו $W\subseteq V_1$ תת-מרחב, אז קיימת העתקה חח"ע ועל בין W ו $f(W)$.