אלגברה לינארית להנדסת מכונות, 201.1.3721

אביב 2016 (מרצה: ד.קרנר)

תרגיל בית מס' 8.

(1) האם קיימת ט"ל $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^2$ המקיימת את התנאים הבאים? האם ט"ל כזאת בהכרח יחידה?

i. $T(1,1,1)=(1,0)$, $T(1,-1,1)=(0,1)$. ii. $T(5,6,7)=(3,4)$, $T(3,4,5)=(2,3)$, $T(1,2,3)=(1,2)$.

(2) תהי $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^2$ ט"ל המוגדרת ע"י $T(x,y,z)=(x+y,2z-x)$. מצאו את $[T]^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_2}$ כאשר:

(א) $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2$ הבסיסים הסטנדרטים של $\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2$ בהתאם.

(ב) $\mathcal{B}_1=(v_1,v_2,v_3)$, $v_1=(1,0,-1)$, $v_2=(1,1,1)$, $v_3=(1,0,0)$; $\mathcal{B}_2=(u_1,u_2)$, $u_1=(0,1)$, $u_2=(1,1)$.

(3) תהי $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י $T(x,y,z)=(-3x+z,-2x+y,-x+2y+z)$.

(א) מצאו את $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$, $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}$, $[T]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}$ כאשר $\mathcal{E}$ הנו הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$ ו $\mathcal{B}=(v_1,v_2,v_3)$, כאשר $v_1=(1,0,1)$, $v_2=(-1,2,1)$, $v_3=(2,1,1)$.

(ב) הוכיחו כי T הפיכה ומצאו את T^{-1}.

(ג) חשבו את $(T^2+2t-2Id)(T+3Id)$

(4) ט"ל מוגדרת ע"י $\begin{pmatrix}1&2&3&1\\1&3&5&-2\\3&8&13&-3\end{pmatrix}=[T]^{\mathcal{E}_4}_{\mathcal{E}_3}$, כאן $\mathcal{E}_n$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^n$. מצאו את $ker(T)$, $Im(T)$.

(5) תהי $\mathbb{C}^3 \xrightarrow{T} \mathbb{C}^3$ העתקה לינארית המוגדרת ע"י $T(\hat{x}_1)=(i,1,0)$, $T(\hat{x}_2)=(0,1,1)$, $T(\hat{x}_3)=(1,0,i)$, כאן $(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\hat{x}_2)$ הבסיס הסטדרטי של $\mathbb{C}^3$. האם T הפיכה?

(6) תהי $M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_{11}) \xrightarrow{T} (\mathbb{Z}_{11})^2$ המוגדרת ע"י $T(x,y)=\begin{pmatrix}x&-y\\y&x\end{pmatrix}$. הוכיחו כי T הנה ט"ל ומצאו את $ker(T)$, $Im(T)$.

מצאו את $[T]^{\mathcal{E}_1}_{\mathcal{E}_2}$ כאשר $\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2$ הבסיסים הסטנדרטיים של $M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_{11})$ ו $(\mathbb{Z}_{11})^2$.

(7) יהיו V,W,U מרחבים וקטוריים (ממימד סופי). הוכיחו/הפריכו (ע"י דוגמא נגדית):

(א) אם $V \xrightarrow{T} V$ ט"ל ו $ker(T)=Im(T)$ אז $dim(V)=2n$ (מספר זוגי).

(ב) אם $V \xrightarrow{T} V$ ט"ל ו $T^2=T$ אז T הפיכה.

(ג) אם $V \xrightarrow{T} V$ ט"ל ו $ker(T)=\{0\}$ אז T הפיכה.

(ד) אם $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{S} \mathbb{R}^2$ ט"ל אז לפחות אחת מ TS, ST הפיכה.

(ה) אם ט"ל $V \xrightarrow{T} W$ היא על אז היא חח"ע.

(ו) אם $V \xrightarrow{T} W$, $U \xrightarrow{S} V$ ט"ל ו $\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_U,\mathcal{B}_W$ בסיסים סדורים אז $[TS]^{\mathcal{B}_U}_{\mathcal{B}_W}=[T]^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_W}[S]^{\mathcal{B}_U}_{\mathcal{B}_V}$.

(8) (א) יהי $\mathbb{R}[x] \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \mathbb{R}[x]$ אופרטור הנגזרת. האם $\frac{d}{dx}$ הוא על? חח"ע? מצאו $ker(\frac{d}{dx})$, $Im(\frac{d}{dx})$. מהו מקור של $2x^3-3x+2$?

(ב) נניח ש $p(x),q(x)\in\mathbb{R}[x]$ וקבוצות מקור $(\frac{d}{dx})^{-1}(p(x))$, $(\frac{d}{dx})^{-1}(q(x))$ לא זרות. הוכיחו כי אז הן זהות.

(ג) נגדיר $\mathbb{R}_{\le n}[x] \xrightarrow{T} \mathbb{R}_{\le (n-1)}[x]$ ע"י $T(p(x))=\frac{p(x)-p(0)}{x}$. הוכיחו ש T העתקה לינארית. האם היא על? חח"ע? מצאו את המטריצה המייצגת של T בבסיס $\mathcal{B}=(1,x,x^2,\ldots,x^n)$.

(ד) תהי $\mathbb{R}_{\le 5}[x] \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \mathbb{R}_{\le 4}[x]$ העתקת הנגזרת ו $\mathbb{R}_{\le 5}[x] \xrightarrow{T} \mathbb{R}_{\le 4}[x]$ מוגדרת כמו קודם. רשמו את הפעולה של העתקות $T\circ\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dx}\circ T$. מצאו את המטריצות המייצגות שלהן בבסיס $\mathcal{B}=(1,x,x^2,\ldots,x^n)$.

(ה) מצאו את המטריצות המייצגת של $S=2\frac{d^3}{dx^3}-\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d}{dx}+Id$: $\mathbb{R}_{\le 4}[x]\to\mathbb{R}_{\le 4}[x]$ בבסיס $\mathcal{B}=(1,x,x^2,x^3,x^4)$.

(9) האם העתקות הבאות הן לינאריות?

i. $\mathbb{C}^3 \xrightarrow{T} \mathbb{C}^2$, $T(x,y,z)=\begin{cases}(x,y), & xy=0\\(0,0), & xy\neq 0\end{cases}$, ii. $\mathbb{R}[x] \xrightarrow{T} \mathbb{R}^2$, $T(p(x))=(\int\limits_0^2 p(x)dx,\int\limits_7^8 p(x)dx)$,

iii. $\mathbb{C}^2 \xrightarrow{T} \mathbb{C}^2$, $T(z,w)=(\bar{z},\bar{w})$, iv. $\mathbb{R}_{\le 2}[x] \xrightarrow{T} \mathbb{R}^2$, $T(p(x))=(p(0)+p'(1),p(0)\cdot p'(1))$,

v. $\mathbb{C}^2 \xrightarrow{T} \mathbb{C}^2$, $T(z_1,z_2)=\big(Re(z_1)+i\cdot Im(z_2),Re(z_2)+i\cdot Im(z_1)\big)$, vi. $\mathbb{C} \xrightarrow{T} \mathbb{R}$, $T(z)=|z|$.

(10) (א) האם קיימת ט"ל מתת מרחב $V=\{\sum\limits_{i=1}^{7}x_i=0,\ \sum\limits_{i=1}^{7}i\cdot x_i=0\}\subset\mathbb{R}^7$ ל $\mathbb{R}^4$ שהיא חח"ע?

(ב) האם קיימת ט"ל מ $M^{sym}_{9\times 9}(\mathbb{Z}_{11})$ ל $M_{4\times 11}(\mathbb{Z}_{11})$ שהיא על?

(11) יהי $V \xrightarrow{f} V$ אופרטור לינארי על מ"ו. הוכיחו: אם $f^2=f$ אז $ker(f)\cap Im(f)=\{0\}$ ו $ker(f)\oplus Im(f)=V$.