אלגברה לינארית להנדסת מכונות, 201.1.3721

אביב 2016 (מרצה: ד.קרנר)

תרגיל בית מס' 9.

(1) (א) האם העתקות הבאות הן לינאריות? (רשמו את הפעולה של העתקות בקואורדינטות.)

i. $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^3$ היטל על מישור $\{y=0\} \subset \mathbb{R}^3$. ii. $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^2$ שיקוף ביחס לראשית הצירים.

iii. $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^3$ שיקוף ביחס למישור $\{y=0\}$.

(ב) עבור העתקות הבאות רשמו את המטריצה המייצגת בבסיס סטנדרטי:

i. $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{Ref} \mathbb{R}^2$ שיקוף ביחס לישר $\{y = x\cdot tan(\phi)\} \subset \mathbb{R}^2$. ii. $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{T_{\hat{x},\phi_x}} \mathbb{R}^3$ סיבוב בזווית ϕ_x מסביב לציר $\hat{x}$.

iii. $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{T_{\hat{y},\phi_y}} \mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{T_{\hat{z},\phi_z}} \mathbb{R}^3$ סיבובים בהתאם. iv. $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{T_{\hat{y},\phi_y}\circ T_{\hat{x},\phi_x}} \mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{T_{\hat{x},\phi_x}\circ T_{\hat{y},\phi_y}} \mathbb{R}^3$.

v. $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{S} \mathbb{R}^3$, $S(x,y,z) = (\lambda_x\cdot x, \lambda_y\cdot y, \lambda_z\cdot z)$. (מה המשמעות הגאומטרית של S?)

(ג) האם $T_{\hat{x},\phi_x} = T^{-1}_{\hat{y},\phi_y}\circ T_{\hat{x},\phi_x}\circ T_{\hat{y},\phi_y}$? האם $S = T^{-1}_{\hat{y},\phi_y}\circ S\circ T_{\hat{y},\phi_y}$?

(2) (א) תהיינה A, B מטריצות דומות. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמא נגדית:

(i) לכל $n\in\mathbb{N}$ המטריצות A^n, B^n דומות.

(ii) A הפיכה אמ"ם B הפיכה ובמקרה זה מטריצות A^{-1}, B^{-1} דומות.

(iii) $rank(A) = rank(B)$. $det(A) = det(B)$. $trace(A) = trace(B)$.

(iv) אם $A = \mathbb{I}$ אז $B = \mathbb{I}$.

(ב) נניח ש $A = UBU^{-1}$. הוכיחו שעבור כל פולינום $p(x)$ מתקיים $p(A) = U\cdot p(B)\cdot U^{-1}$.

(3) (א) הוכיחו ש $0\in\mathbb{F}$ הוא ע"ע של A אמ"ם $ker(A)\neq\{0\}$.

(ב) תהי A מטריצה אלכסונית. מהם ע"ע של A? אותה שאלה עבור A משולשת עליונה/תחתונה.

(ג) תהי $A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. הוכיחו כי מספר $\lambda\in\mathbb{C}$ הנו ערך עצמי של A אמ"ם $\bar{\lambda}$ הנו גם ערך עצמי. הוכיחו כי אם $v\in\mathbb{C}^n$ הנו וקטור עצמי המתאים ל λ אז $\bar{v}\in\mathbb{C}^n$ הנו וקטור עצמי המתאים ל $\bar{\lambda}$.

(ד) נניח ש $v\in\mathbb{F}^n$ וקטור עצמי של מטריצות A, B. הראו ש v הינו וקטור עצמי של כל המטריצות ב $Span(A,B)$.

(ה) נניח ש $v\in\mathbb{F}^n$ וקטור עצמי של מטריצה A המתאים לערך עצמי λ. הראו כי לכל $n\geq 1$, v הנו וקטור עצמי של A^n המתאים לערך עצמי λ^n.

(ו) הוכיחו/הפריכו (ע"י דוגמא נגדית)

i. למטריצות A, A^t יש אותם ערכים עצמיים. ii. למטריצות A, A^t יש אותם וקטורים עצמיים.

(ז) יהי λ_A ע"ע של $A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ו λ_B ע"ע של $B\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. האם בהכרח לפחות אחד מ $\lambda_A, \lambda_B, \lambda_A\lambda_B, \lambda_A+\lambda_B$ הנו ע"ע של AB?

(ח) נניח שלמטריצה $A\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ ישנם n ע"ע שונים: $\{\lambda_i\}_{i=1,\dots,n}$, $\lambda_i\neq\lambda_j$ עבור $i\neq j$. הוכיחו כי הווקטורים העצמיים $v_{\lambda_1},\dots,v_{\lambda_n}$ הם בת"ל. (רמז: כאן תצטרכו לבדוק שדטרמיננט מסוים לא מתאפס. עבור $n=2,3$ ניתן לבדוק בצורה ישירה. בעבור n כללי תגגלו: $Vandermonde\ matrix$)

(4) (א) תהי $A\in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ המקיימת: $A^2 = \mathbb{O}$, $A\neq\mathbb{O}$. הוכיחו ש A דומה ל $\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$.

(ב) נניח ש $det(A) = det(B)$, $trace(A) = trace(B)$, $rank(A) = rank(B)$. האם A, B בהכרח דומות?

(5) (א) מצאו את הפולינום האופייני של המטריצות: i. $\begin{bmatrix}0&a\\-a&0\end{bmatrix}$, ii. $\begin{bmatrix}0&0&c\\1&0&b\\0&1&a\end{bmatrix}$, iii. $\begin{bmatrix}9&-1&-4\\-1&1&4\\3&-1&2\end{bmatrix}$.

(ב) תהי $A\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, $A^t = -A$, כאשר n אי-זוגי. הוכיחו שהמקדם החפשי של הפולינום אופייני של A הנו אפס.

(ג) חשבו את הסכום והמכפלה של כל הערכים העצמיים של $A = \begin{bmatrix}x&y&0\\0&z&0\\c&0&d\end{bmatrix}\in M_{3\times 3}(\mathbb{F})$

(6) עבור כל אחת מהמטריצות הבאות מצאו את הערכים העצמיים, את המרחבים העצמיים. אם המטריצה לכסינה מצאו את הצורה האלכסונית ואת המטריצה המלכסנת.

(א) (מעל $\mathbb{C}$): $\begin{bmatrix}3&1&1\\2&4&2\\1&1&3\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&2&2\\1&2&-1\\-1&1&4\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

(ב) $\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\in M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_2)$, $\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\begin{bmatrix}cos(\alpha)&-sin(\alpha)\\sin(\alpha)&cos(\alpha)\end{bmatrix}\in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ כאן $\alpha\in\mathbb{R}$.