אלגברה לינארית להנדסת מכונות, 201.1.3721

אביב 2016 (מרצה: ד.קרנר)

תרגילי חזרה לפני הבוחן

(1) (א) הוכיחו (כאן $z\in\mathbb{C}$): i. $(\bar{z})^n=\bar{z^n}$, ii. $|z|^n=|z^n|$, iii. $\overline{z_1z_2^{-1}}=\bar{z}_1\bar{z}_2^{-1}$, iv. $|z_1-z_2|\ge|z_1|-|z_2|$.

(ב) ציירו במישור המרוכב את הקבוצות הבאות i. $\{z\in\mathbb{C}:\ |z|>1,\ |z-2|<3\}$, ii. $\{z\in\mathbb{C}:\ -1\le z+\bar{z}\le 1\}$, iii. $\{z\in\mathbb{C}:\ z^2-(\bar{z})^2=1\}$, iv. $\{z\in\mathbb{C}:\ z^7=1\}$.

(ג) הראו שאם $z\in\mathbb{C}$ הנו שורש של $p(x)\in\mathbb{R}[x]$ אז גם $\bar{z}\in\mathbb{C}$ הוא שורש.

(2) בין פתרונות המערכת $Ax=b$ מצאו את הפתרון הקרוב ביותר לנקודה $(1,1,1)$,
כאשר $A=\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&1&-1\\-3&1&1\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}-1\\3\\-1\end{bmatrix}$. ("הקרוב ביותר" במובן של המרחק הרגיל ב $\mathbb{R}^3$.)

(3) מצאו את הפולינום $p(x)\in\mathbb{C}_{\le2}[x]$ המקיים $p(1)=3+2i$, $p(-1)=-1$, $p(i)=i$. (למה פולינום כזה הוא יחיד?)

(4) אילו מהקבוצות הבאות הן מרחבים וקטוריים? אילו מהקבוצות הן תתי-מרחב של מרחבים אחרים?

(א) V= קבוצת כל הפונקציות הרציפות, $\mathbb{R}\xrightarrow{f}\mathbb{R}$. $W\subseteq V$ תת קבוצה של הפונקציות המקיימות: $|f(x)|\ge|x|$ עבור $|x|\le 1$. $W_{\nearrow}\subset V$ תת קבוצה של כל הפונקציות העולות. $W\subset V$ כל הפונקציות המתאפסות בנקודות $\{3,-17,\pi,ln(2)\}$.

(ב) V= אוסף של כל הסדרות הממשיות, $\{a_n\}=(a_1,a_2,a_3,\dots)$. $W_1\subset V$ תת-קבוצה של כל הסדרות המתכנסות. $W_2\subset V$ תת-קבוצה של כל הסדרות הלא מתכנסות. $W_3\subset W$ תת קבוצה של כל הסדרות המתאפסות החל ממקום מסוים. $W_{\nearrow}\subset V$ תת קבוצה של כל הסדרות העולות.

(5) במקרים הבאים בדקו האם קבוצת הוקטורים היא בת"ל

(א) $V=\mathbb{F}_{\le4}[x]$, $S=\{p_1(x)=x^3-x,\ p_2(x)=x^2+x,\ p_3(x)=x^4-x^2-x\}$

(ב) $V=M_{2\times2}(\mathbb{F})$, $S=\{B_1=\begin{bmatrix}2&3\\4&5\end{bmatrix},\ B_2=\begin{bmatrix}1&2\\-1&-3\end{bmatrix},\ B_3=\begin{bmatrix}3&5\\3&2\end{bmatrix}\}$

(ג) $V=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$, $S=\{sin(x),sin^2(x)\}$

(ד) קבוצת העמודות של מטריצה משולשת עליונה הפיכה.

(6) במקרים הבאים בדקו האם/מתי קבוצת הוקטורים היא פורשת

(א) $V=\mathbb{F}^3$, $S=\{(1,a,a^2),\ (1,b,b^2),\ (1,c,c^2)\}$, כאן $a,b,c\in\mathbb{F}$ קבועים.

(ב) $V=\mathbb{F}_{\le3}[x]$, $S=\{x^3+x,x^2+x+1,2x-1,4x^3+5x^2-3x+11\}$

(7) (א) יהי $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4|\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0\}$ ויהי $v_1=(3,-2,-1,1)$. מצאו $v_2,v_3,v_4\in\mathbb{R}^4$ כך ש v_1,v_2,v_3 מהווים בסיס ל V ו v_1,v_2,v_3,v_4 מהווים בסיס ל $\mathbb{R}^4$.

(ב) מצאו בסיסים עבור מרחבים וקטוריים הבאים ומצאו את המימדים:

i. $V=\{p(x)\in\mathbb{C}_{\le3}[x]|\ p'(0)=p(-1)\}$, ii. $V=\{A\in M_{3\times2}(\mathbb{C})|\ A\begin{bmatrix}1+i\\2+i\end{bmatrix}=\vec{0}\in\mathbb{C}^3\}$

iii. $V=W\cap U$, כאשר $W=Span(1,x^2+x,x^3,x^3+x^4,x^4+2)$, $U=\{p(x)\in\mathbb{R}[x]|\ p(2)=0\}$,

iv. $M_{n\times n}^{sym}(\mathbb{F})=\{A\in M_{n\times n}(\mathbb{F})|\ A=A^t\}$, v. $M_{n\times n}^{anti-sym}(\mathbb{F})=\{A\in M_{n\times n}(\mathbb{F})|\ A=-A^t\}$,

vi. $V=\{A=\begin{bmatrix}A_1&\mathbb{O}\\\mathbb{O}&A_2\end{bmatrix}|\ A_i\in M_{n_i\times n_i}(\mathbb{F})\}$, כאן n_1,n_2 קבועים.

(8) הוכיחו שקבוצת פולינומים $p_0(x)=1$, $p_1(x)=1+x$, ..., $p_n(x)=1+x+\dots+x^n$,... מהווה בסיס ל $\mathbb{F}[x]$.

(9) במקרים הבאים הוכיחו את הפיצול לסכום ישר: i. $\mathbb{F}_{\le5}[x]=\mathbb{F}_{\le3}[x]\oplus Span\{x^5-x^3,x^4-1\}$

ii. $M_{n\times n}(\mathbb{F})=M_{n\times n}^{sym}(\mathbb{F})\oplus M_{n\times n}^{anti-sym}(\mathbb{F})$, iii. $M_{n\times n}(\mathbb{F})=\{A|\ a_{ij}=0,\ i<j\}\oplus\{A|\ a_{ij}=0,\ i\ge j\}$,

iv. { פונקציות $\mathbb{R}\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ } ={ פונקציות זוגיות } $\oplus$ { פונקציות אי-זוגיות }

(10) (א) חשבו: i. $\begin{bmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{bmatrix}^n$, $a\in\mathbb{R}$, ii. $\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}^n$, $\lambda\in\mathbb{C}$, iii. $\begin{bmatrix}cos(\alpha) & -sin(\alpha)\\ sin(\alpha) & cos(\alpha)\end{bmatrix}^n$.

(ב) בהינתן $A=\begin{bmatrix}1 & i\\ 1 & -i\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}i & 1\\ -i & 1\end{bmatrix}$, חשבו: $(1+i)A+(1-i)B$, $A^t-i\cdot B$, $A^t\cdot B^t-2i(A\cdot B)^t$.

(ג) בהינתן $A=\begin{bmatrix}5 & \alpha & \beta\\ 0 & 5 & \alpha\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$ ו $f(x)=(5-x)^4$ חשבו את $f(A)$.

(ד) חשבו את דרגת המטריצה

i. $\begin{bmatrix}1 & k & -1 & 2\\ 2 & -1 & k & 5\\ 1 & 1 & -6 & 1\end{bmatrix}$, ii. $\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & k\\ 2 & k+1 & 2 & 2\\ k & 2k & 3 & 3\end{bmatrix}$, iii. $\begin{bmatrix}1 & a & d & ad\\ 1 & b & e & be\\ 1 & c & f & cf\end{bmatrix}$, כאן מספרים a,b,c הם זרים וגם מספרים d,e,f הם זרים.

(11) תהיינה $A\in M_{m\times n}(\mathbb{C})$, $B\in M_{n\times k}(\mathbb{C})$. הוכיחו/הפריכו (ע"י דוגמא נגדית):

(א) כל שורה של AB היא צירוף לינארי של שורות של A. כל שורה של AB היא צירוף לינארי של שורות של B.
כל עמודה של AB היא צירוף לינארי של עמודות של A. כל עמודה של AB היא צירוף לינארי של עמודות של B.

(ב) $Span(Row(AB))\subseteq Span(Row(A))$. $Span(Row(AB))\subseteq Span(Row(B))$.
$Span(Columns(AB))\subseteq Span(Columns(A))$. $Span(Columns(AB))\subseteq Span(Columns(B))$.

(ג) $rank(AB)\leq min(rank(A),rank(B))$.

(12) (א) הוכיחו ש $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$. תנו דוגמא שעבורה $(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2$.

(ב) תנו דוגמא ל $\mathbb{O}\neq A,B\in M_{n\times n}(\mathbb{Z}_{13})$ המקיימות: $AB=\mathbb{O}$.

(ג) תנו דוגמא ל $\pm 2\cdot\mathbb{I}\neq A\in M_{n\times n}(\mathbb{Z}_{13})$ המקיימת: $A^2=4\cdot\mathbb{I}$.

(13) תהיינה $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -4\\ 1 & 5 & -1\\ 3 & 13 & -6\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 5 & 0\end{bmatrix}$ מעל $\mathbb{R}$. מצאו את המטריצות ההפוכות, אם הן קיימות. (עשו את החישוב גם בעזרת דירוג וגם בעזרת המטריצה המצורפת.) הציגו את המטריצות A, B, C כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

(14) (א) חשבו $det(A)$ עבור $A\in M_{n\times n}(\mathbb{Q})$ המקיימת $a_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$.

(ב) חשבו $det(A)$ עבור $A\in M_{n\times n}(\mathbb{Q})$ המקיימת $a_{ij}=\begin{cases}0, & i=j\\ 1, & i\neq j\end{cases}$.

(15) תהי $A\in M_{n\times n}(A)$ הפיכה. הראו כי $adj(A)$ הפיכה ו $[adj(A)]^{-1}=adj(A^{-1})$. הראו כי $adj(A^t)=adj(A)^t$.
חשבו את $det(adj(A))$ ואת $det(adj(adj(A)))$.

(16) הוכיחו/הפריכו (ע"י דוגמא נגדית)

(א) אם A משולשת עליונה והפיכה אז A^{-1} משולשת עליונה. (או משולשת תחתונה?)

(ב) אם A סימטרית אז A^2 גם סימטרית. (מה קורה עבור A אנטיסימטרית?)

(ג) אם A סימטרית אז עבור כל P ריבועית, מטריצה PAP^t גם סימטרית. (מה קורה עבור A אנטיסימטרית?)

(17) נתון $p(x)=x^2-x+1\in\mathbb{C}$. ידוע ש $A\in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ מקיימת $p(A)=0$. הראו כי A הפיכה. מצאו $det(A)$.

(18) הוכיחו: $det(A)=0$, $A^t=-A$, n אי-זוגי