אלגברה לינארית להנדסת מכונות

תרגיל בית מס' 2

שאלה 1

טבלת כפל עבור $\mathbb{Z}_6$:

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

ניתן לראות שרק $\bar{1}$ ו-$\bar{5}$ הפיכים ב-$\mathbb{Z}_6$

טבלת חיסור (נניח שאנו כותבים בטבלה את (המספר בצד) - (המספר למעלה))

$-$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$

שאלה 2

פתרון מערכת ii)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

פתרון מערכת iii)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix}$$

פתרון למערכת iv)

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+i\\i\end{pmatrix}$$

שאלה 3

פתרון מערכת i)

עבור $k\neq 1,-2$ ישנו פתרון יחיד הנתון ע"י

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{(k-1)(k+2)}\cdot\begin{pmatrix}k\\-2\\k\end{pmatrix}$$

עבור $k=1,-2$ אין פתרון.

שאלה 4

פתרון למערכת השמאלית בסעיף ב':

פתרון כללי נראה כך $x=\alpha$, $y=\left(-\frac{8}{61}-\frac{34i}{61}\right)\alpha$,

$$z=\left(\frac{205}{793}+\frac{2i}{793}\right)\alpha$$

וזה לכל $\alpha\in\mathbb{C}$

שאלה 5

הדרך לפתרון זהה לפתרון הסעיפים בשאלה 2.

שאלה 6

א) לא. אם אני מעל שדה סופי אז יכול לקרות מצב בו יש רק מספר סופי של פתרונות.
אפשר גם לתת דוגמא של מערכת עבורה פשוט אין פתרון (וזה גם עונה על סעיף ג). למשל:

$$0\cdot x_1+0\cdot x_2=1$$

כי מערכת עם משוואה אחת ושני נעלמים ללא פתרון.

ב) לא. משום ש- חג"מ (ובהנחה שיש פתרון) ישנו לפחות משתנה חופשי אחד. המשתנה הזה יכול לקבל כל ערך בשדה מעליו אנו עובדים. השדה הקטן ביותר מכיל שני איברים ולכן לא יתכן שיש רק פתרון אחד במצב המתואר.

ג) ראו א'.

שאלה 7

א) לא. אם קיים יותר מפתרון אחד אז זה משום שיש משתנה חופשי בסוף תהליך הדירוג והוא יכול לקבל כל ערך ב-R. משום ש-R אינסופי לא יתכן שישנם רק שני פתרונות.

ב) כן. לדוגמה $\bar{1}\cdot x_1+\bar{1}\cdot x_2=\bar{0}$
מעל השדה $\mathbb{Z}_2$. x_2 חופשי ולכן הפתרונות הם: $x_1=\bar{0}, x_2=\bar{0}$ וגם $x_1=\bar{1}, x_2=\bar{1}$.

שאלה 8

נניח שזו המערכת המקורית

$$\begin{matrix} a_{1,1}x_1+\dots+a_{1,n}x_n=b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m,1}x_1+\dots+a_{m,n}x_n=b_m \end{matrix}$$

אם נכפיל את כל המשוואות בקבוע γ ונחבר נקבל את המשוואה הבאה:

$$\gamma a_{1,1}x_1+\dots+\gamma a_{1,n}x_n+\dots\dots+\gamma a_{m,1}x_1+\dots+\gamma a_{m,n}x_n=\gamma b_1+\dots+\gamma b_n$$

כעת אם נציב במקום $x_1,\dots,x_n$ פתרון של המערכת המקורית נקבל בצד שמאל

$$\gamma\cdot b_1+\gamma b_2+\dots+\gamma b_m$$

ולכן פתרון של המערכת המקורית פותר גם את המשוואה החדשה.

זה גם הגיוני מפשט שכל מה שעשינו כדי להגיע למשוואה החדשה זה פעולות שורה וראינו שהן לא משפיעות על מרחב הפתרונות.

שאלה 9

ננסה לפתור את המערכת:

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & e \\ c & d & f \end{array}\right) \xrightarrow[R_2\leftarrow R_2-\frac{c}{a}\cdot R_1]{\text{בהנחה ש-}\ a\neq 0} \left(\begin{array}{cc|c} a & b & e \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} & \frac{af-ce}{a} \end{array}\right) \xrightarrow[R_2\leftarrow R_2\cdot\frac{a}{ad-bc}]{R_1\leftarrow R_1\cdot\frac{1}{a}}$$

בהנחה ש- $ad-bc\neq 0$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{b}{a} & \frac{e}{a} \\ 0 & 1 & \frac{af-ce}{ad-bc} \end{array}\right)$$

אז אכן

$$y=\frac{af-ce}{ad-bc}$$

$$x=\frac{e}{a}-\frac{b}{a}\cdot\frac{af-ce}{ad-bc}=\frac{ade-bce-abf+bce}{a(ad-bc)}=\frac{de-bf}{ad-bc}$$

כעת נבדוק מה קורה כאשר $a=0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & b & \vdots & e \\ c & d & \vdots & f \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} c & d & \vdots & f \\ 0 & b & \vdots & e \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{בהנחה ש-}c\neq 0]{R_1 \leftarrow R_1 \cdot \frac{1}{c}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{c} & \vdots & \frac{f}{c} \\ 0 & b & \vdots & e \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[R_2 \leftarrow R_2 \cdot \frac{1}{b}]{\text{בהנחה ש-}b\neq 0} \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{c} & \vdots & \frac{f}{c} \\ 0 & 1 & \vdots & \frac{e}{b} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} y &= \frac{e}{b} \\ x &= \frac{f}{c} - \frac{d}{c} \cdot \frac{e}{b} = \frac{bf - de}{cb} \end{aligned}$$

מה עם $b=0$? נניח $b=0$ במטריצה לפני שמחלקים ב-b:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{c} & \vdots & \frac{f}{c} \\ 0 & 0 & \vdots & e \end{pmatrix}$$

כאן יהיו פתרונות רק אם $e=0$ (אחרת מתקבלת משוואת סתירה). במקרה כזה x_2 חופשי ולכן יהיו אינסוף פתרונות.

אם $c=0$ אז המערכת היא למעשה

$$\begin{pmatrix} 0 & b & \vdots & e \\ 0 & d & \vdots & f \end{pmatrix}$$

כלומר, x_1 לא משתתף בה ולכן אם קיים פתרון יהיו כבר אינסוף פתרונות (בדיוק משום ש-x_1 חופשי להיות כל מספר ממשי).

כעת נחזור למקרה האחרון שעוד לא בדקנו: $a\neq 0$ וגם $ad-bc=0$. מקבלים את המערכת:

$$\begin{pmatrix} a & b & \vdots & e \\ 0 & 0 & \vdots & \frac{af-ce}{a} \end{pmatrix}$$

ושוב אם קיים פתרון אז x_2 חופשי ולכן יהיו אינסוף פתרונות.

נסכם את כל המקרים והמסקנות:

אם $a\neq 0$ וגם $ad-bc\neq 0$ - פתרון יחיד כנדרש.

אם $a=0$ וגם $b\neq 0$ וגם $c\neq 0$ - פתרון יחיד כנדרש.

אם $a=0$ וגם $c\neq 0$ וגם $b=0$ (שזה אומר גם $ad-bc=0$) - אין פתרון יחיד

אם $a=0$ וגם $c=0$ (זה אומר גם $ad-bc=0$) - אין פתרון יחיד.

אם $ad-bc=0$ - אין פתרון יחיד.

לסיכום: הראינו שיש פתרון יחיד כנדרש אם ורק אם $ad-bc\neq 0$.