Homework 3

1. No,
2. i. no, ii. no, iii. Yes.
3. i. Yes, ii. No.
4. b. i. Yes, ii. No, iii. No, iv. Yes.
5. i.No ii.Yes iii. $-9a_1+13a_2+2a_3+8a_4=0$
6. $Span\{v_1,v_2\}=\{(x,y,z)\in C^3 : \frac{2z+(-1+2i)x}{1-3i}-\frac{y+\frac{-3+i}{2}x}{3-3i}=0\}$
   In which case $(x,y,z)=\alpha v_1+\beta v_2;\ \alpha=-\frac{1}{6}iy+\frac{1-3i}{12}x; \beta=\frac{1+i}{6}y-\frac{2+i}{6}x$
   i. $\alpha=\beta=1$. ii. no. iii. $\alpha=3+5i,\ \beta=0$
7. i. Yes (linearly dependent), ii. no.
8. i. no. ii. Yes.
9. $\{(a,b,c,d,e)\in Q^5 : d-e=0;\ -a-b+c+d=0\}$
10. For $V=R^2,\ S=\{(1,0)\},\ T=\{(0,1)\}$ we get $Span(S\cup T)=R^2\neq span(S)\cup span(T)$ so the proposition is not generally true.
11. Proof
12. $V_1\cap V_2=\varphi;\ V_1+V_2=F_{\leq n}[x]$

13. נוכיח:

נקח $v\in Span(v_1,...,v_k)\cap Span(v_{k+1},...,v_n)$, כלומר $v=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j v_j=\sum_{j=k+1}^{n}\alpha_j v_j$, ואם נעביר אגפים נקבל $\sum_{j=1}^{k}\alpha_j v_j=\sum_{j=k+1}^{n}\alpha_j v_j \Rightarrow \sum_{j=1}^{k}\alpha_j v_j-\sum_{j=k+1}^{n}\alpha_j v_j=0$. זהו צירוף לינארי מעל הוקטורים הבלתי תלויים לינארית $v_1,...,v_n$, ולכן כל המקדמים הם 0, ובפרט $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_k=0$, לכן $v=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j v_j=\sum_{j=1}^{k}0v_j=0$. כלומר $Span(v_1,...,v_k)\cap Span(v_{k+1},...,v_n)=\{0\}$.

14. נוכיח:

א. **אם** $W_1\subseteq W_2$ **או** $W_2\subseteq W_1$ **, אז נראה ש-** $W_1\cup W_2$ **תת-מרחב וקטורי:** בלי הגבלת הכלליות $W_1\subseteq W_2$ (לגבי המקרה השני - ההוכחה זהה). לכן $W_1\cup W_2=W_2$, ומכיוון ש-W_2 תת-מרחב וקטורי של V, אז $W_1\cup W_2$ תת-מרחב וקטורי.

אם $W_1\cup W_2$ **תת-מרחב וקטורי אז נראה ש-** $W_1\subseteq W_2$ **או** $W_2\subseteq W_1$: נניח בשלילה שלא, כלומר ש-W_1 אינו מוכל ב-W_2 וגם ש-W_2 אינו מוכל ב-W_1. כלומר שקיים $w_1\in W_1$ כך ש-$w_1\notin W_2$, ושקיים $w_2\in W_2$ כך ש-$w_2\notin W_1$. נבחין ש-$w_1,w_2\in W_1\cup W_2$, ומכיוון שמההנחה $W_1\cup W_2$ תת-מרחב וקטורי של V, אז הוא סגור לחיבור, ולכן $w_1+w_2\in W_1\cup W_2$.

אם $w_1+w_2\in W_1\cup W_2$ אז מהגדרת האיחוד $w_1+w_2\in W_1$ או $w_1+w_2\in W_2$.

- אם $w_1+w_2\in W_1$, אז מכיוון שגם $w_1\in W_1$, אז גם הצירוף הלינארי $w_2=w_1+w_2-w_1\in W_1$, וזו סתירה לכך ש-$w_2\notin W_1$.
- אחרת, אם $w_1+w_2\in W_2$, אז מכיוון שגם $w_2\in W_2$, אז גם הצירוף הלינארי $w_1=w_1+w_2-w_2\in W_2$, וזו סתירה לכך ש-$w_1\notin W_2$.

מכאן שבכל מקרה מקבלים סתירה להנחה בשלילה, ולכן $W_1\subseteq W_2$ או $W_2\subseteq W_1$ כנדרש.

ב. אם $V=W_1\cup W_2$, אז $W_1\cup W_2$ בפרט תת-מרחב של V, ולכן $W_1\subseteq W_2$ או $W_2\subseteq W_1$:
- אם $W_1\subseteq W_2$, אז $V=W_1\cup W_2=W_2$, כלומר $V=W_2$.
- אחרת אם $W_2\subseteq W_1$, אז $V=W_1\cup W_2=W_1$, כלומר $V=W_1$.

כלומר, בכל המקרים, V שווה לאחד המרחבים באיחוד.

15. נוכיח:

א. **נניח כי** $u_1,...,u_r$ **בת"ל (בלתי תלויים לינארית), וכי** $\alpha_1,...,\alpha_r\neq 0$ **ונראה כי** $\alpha_1u_1,...,\alpha_ru_r$ **בת"ל**:
יהי צירוף לינארי ששווה ל-0 של $\alpha_1u_1,...,\alpha_ru_r$, $\sum_{i=1}^{r}\beta_i(\alpha_iu_i)=0$. מאסוציאטיביות בכפל בסקלר,

$$0=\sum_{i=1}^{r}\beta_i(\alpha_iu_i)=\sum_{i=1}^{r}(\beta_i\alpha_i)u_i$$

כלומר $(\beta_i\alpha_i)$ אוסף מקדמים בצירוף לינארי מעל $u_1,...,u_r$ ששווה ל-0, ולכן לכל $\beta_i\alpha_i=0$. מכיוון שלכל i $\alpha_i\neq 0$, אזי בהכרח לכל i $\beta_i=0$. לכן הצירוף $\sum_{i=1}^{r}\beta_i(\alpha_iu_i)$ הינו הצירוף הלינארי הטריוויאלי, והוקטורים $\alpha_1u_1,...,\alpha_ru_r$ הינם בלתי תלויים לינארית.

ב. **נניח כי** $u_1,...,u_r$ **בת"ל (בלתי תלויים לינארית), כי** $\alpha_1,...,\alpha_r$ **סקלרים כך ש-** $\alpha_i\neq 0$ **, כי** $\omega=\sum_{j=1}^{r}\alpha_iu_i$ **. נראה ש-** $u_1,...,u_{i-1},\omega,u_{i+1},...,u_r$ **בת"ל**: יהי צירוף לינארי ששווה ל-0 של $u_1,...,u_{i-1},\omega,u_{i+1},...,u_r$, $\sum_{i\neq j=1}^{r}\beta_ju_j+\beta_i\omega=0$. מאסוציאטיביות בכפל בסקלר ודיסטריבוטיביות, נקבל ש-

$$0=\sum_{i\neq j=1}^{r}\beta_ju_i+\beta_i\omega=\sum_{i\neq j=1}^{r}\beta_ju_i+\beta_i\sum_{j=1}^{r}\alpha_ju_j=\sum_{i\neq j=1}^{r}\beta_ju_i+\sum_{j=1}^{r}\beta_i\alpha_ju_j=\sum_{i\neq j=1}^{r}(\beta_j+\beta_i\alpha_j)u_j+\beta_i\alpha_iu_i$$

כלומר, זהו צירוף לינארי מעל $u_1,...,u_r$ ששווה ל-0, ולכן כל המקדמים שווים 0, דהיינו:
$\beta_1+\beta_i\alpha_1=...=\beta_{i-1}+\beta_i\alpha_{i-1}=\beta_i\alpha_i=\beta_{i+1}+\beta_i\alpha_{i+1}=...=\beta_r+\beta_i\alpha_r=0$.

1. מכיוון שבפרט $\beta_i\alpha_i=0$ ו- $\alpha_i\neq 0$ אז $\beta_i=0$.
2. לכן לכל j $\beta_j+\beta_i\alpha_j=\beta_j$, ואם נציב במשוואות שקיבלנו לעיל נקבל $\beta_1=...=\beta_r=0$.

מכאן שהצירוף $\sum_{i\neq j=1}^{r}\beta_ju_j+\beta_i\omega=0$ הוא הצירוף הלינארי הטריוויאלי. הראינו שכל צירוף לינארי מעל $u_1,...,u_{i-1},\omega,u_{i+1},...,u_r$ ששווה ל-0 הוא הצירוף הטריוויאלי, ולכן $u_1,...,u_{i-1},\omega,u_{i+1},...,u_r$ בלתי תלויים לינארית.