(1

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 60 & 27 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 8 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 1 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 & 10 & 110 \\ 63 & 7 & 77 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -23 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 18 \\ -16 & -3 \\ -56 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 31 & 19 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ -3 & 7 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 4 \\ 3 & -11 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & -75 & 71 \\ 5 & -53 & 66 \\ -1 & -3 & -18 \end{pmatrix}$$

2) יש מטריצות רבות. לדוגמה

$$B=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

6) כן לא!! $A, B, C \in \mathbb{C}^2$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

יש עוד דוגמאות נגדיות רבות

7)

$$A^2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad A^3=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad n\geq 4,\ A^n=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$B^n=\begin{pmatrix}1 & n & \frac{n(n-1)}{2}\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

8) דוגמה:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

9)

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-4 & 1 & 5\\ 2 & 10 & -9\\ -6 & 12 & 1\end{pmatrix}^{-1}$$ לא קיימת

(למה כי $L_3-2L_1-L_2=\bar{0}$)

9) המשך:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ -4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

מעל Z_{11}:

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{7} & \bar{8} \\ \bar{6} & \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{10} & \bar{4} & \bar{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{6} & \bar{2} & \bar{6} \\ \bar{2} & \bar{6} & \bar{5} \\ \bar{10} & \bar{0} & \bar{10} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{5} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{7} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{0} & \bar{3} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{5} & \bar{3} & \bar{3} \\ \bar{5} & \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{4} & \bar{4} & \bar{1} \end{pmatrix}$$

10) א. $P_1 = E^{(\frac{1}{\lambda} \times j)}$ (כמובן $\lambda \neq 0$).

$P_2 = E^{(j \leftrightarrow k)}$

$P_3 = E^{(j - \lambda k)}$

ב. E^{-1}, E^2 - אלמנטריות

$2E$ - לא אלמנטרית.

11) א. $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $PA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

ב. לפי ג'...

ג.

$[v]_A = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $[v]_{PA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

13) i. דרגה 3.

ii. נמצא את הדרגה בעזרת דירוג

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3-(bc)(L_1)\to L_3]{L_2-(b+c)(L_1)\to L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & a-c \\ 0 & c(a-b) & b(a-c) \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3-cL_2\to}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & a-c \\ 0 & 0 & b(a-c)-c(a-c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & a-c \\ 0 & 0 & (b-c)(a-c) \end{pmatrix}$$

1) אם $a-b, b-c, a-c \neq 0$ אז המטריצה מדרגה 3.

2) אם $a=b$ (כלומר $a-b\neq 0$): נקבל

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & (b-c) \\ 0 & 0 & (b-c)^2 \end{pmatrix}$$

אם $c\neq b$ אז הדרגה היא 2.

אחרת, אם $b=c$ הדרגה היא 1.

3) אחרת, אם $a\neq b$ ו- $b=c$ או $a=c$ נקבל

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & (a-b) & (a-c) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שמשמע נוכל להגיע למטריצה מדורגת קנונית עם 2 מקדמים מובילים כלומר הדרגה היא 2.

14) יהיו $W_1,W_2\le V$ תתי-מרחבים.

א. נניח כי $W_1\cup W_2$ תמ"ו של V, ונניח בשלילה כי W_1 אינו מוכל ב-W_2 ($W_1\not\subseteq W_2$) וגם W_2 אינו מוכל ב-W_1 ($W_2\not\subseteq W_1$).
כלומר, קיים $v_1\in W_1$ כך ש $v_1\notin W_2$, וקיים $v_2\in W_2$ ו- $v_2\notin W_1$.
$v_1,v_2\in W_1\cup W_2$ ומכיוון ש $W_1\cup W_2$ תת-מרחב, אזי הוא סגור לחיבור, כלומר $v_1+v_2\in W_1\cup W_2$. מכיוון שזה איחוד, אז $v_1+v_2\in W_1$ או $v_1+v_2\in W_2$.
- אם $v_1+v_2\in W_1$, אז בגלל ש $v_1\in W_1$ אז $v_2=(v_1+v_2)-v_1\in W_1$ וזו סתירה לכך ש $v_2\notin W_1$.
- אם $v_1+v_2\in W_2$ אז מכיוון ש- $v_2\in W_2$ אז $v_1=(v_1+v_2)-v_2\in W_2$, וזו סתירה לכך ש- $v_1\notin W_2$.

ב. אם $V=W_1\cup W_2$ אז בפרט $W_1\cup W_2$ תמ"ו של V, כלומר $W_1\subseteq W_2$ או $W_2\subseteq W_1$. בלי הגבלת הכלליות $W_1\subseteq W_2$ ולכן $V=W_1\cup W_2=W_2$.

15. יהיו $u_1,\dots,u_r\in V/F$ בת"ל, ויהיו $\alpha_1,\dots,\alpha_r\in F$ סקלרים שונים מ-0.

א. נסתכל על צירוף לינארי לא טריוויאלי של $\alpha_1u_1,\dots,\alpha_ru_r$

$$\sum_{i=1}^{r}\beta_i(\alpha_iu_i)=\sum_{i=1}^{r}(\beta_i\alpha_i)u_i$$

קיים i כך ש $\beta_i\neq0$, ומכיוון שגם $\alpha_i\neq0$ אז $\beta_i\alpha_i\neq0$, כלומר, זהו צירוף לינארי של $u_1,\dots,u_r$ עם מקדמים $\beta_1\alpha_1,\dots,\beta_r\alpha_r$ שלפחות אחד מהם שונה מ-0, ולכן $\sum_{i=1}^{r}(\beta_i\alpha_i)u_i\neq0$. ולכן גם $\alpha_1u_1,\dots,\alpha_ru_r$ בת"ל.

ב. נסתכל על צירוף לינארי לא טריוויאלי של $u_1,\dots,u_{i-1},w,u_{i+1},\dots,u_r$ כש- $w=\sum_{k=1}^{r}\alpha_ku_k$.

$$\sum_{j=1}^{i-1}\beta_ju_j+\beta_i\sum_{k=1}^{r}\alpha_ku_k+\sum_{j=i+1}^{r}\beta_ju_j=(*)$$

* אם $\beta_i=0$ אז זהו צ"ל לא טריוויאלי של $u_1,\dots,u_{i-1},u_{i+1},\dots,u_r$, ומכיוון שהם בת"ל אז גם זה שונה מ-0.
* אחרת $\beta_i\neq0$ וה-צ"ל שווה ל- $(*)=\sum_{j=1}^{i-1}(\beta_j-\beta_i\alpha_j)u_j+\beta_i\alpha_iu_i+\sum_{j=i+1}^{r}(\beta_j-\beta_i\alpha_j)u_j$

צ"ל מעל $u_1,\dots,u_r$, כשהמקדם $\beta_i\alpha_i\neq0$ (כי $\beta_i\neq0$ ו- $\alpha_i\neq0$), ולכן הצירוף הלינארי שונה מ-0, כלומר בקבוצה בת"ל.

Scanned by CamScanner